



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

ULB

# Isotrope Lichtstreuung in Papier: neue Überlegungen zur Kubelka-Munk-Theorie

Berg, Felix  
(1997)

DOI (TUprints): <https://doi.org/10.25534/tuprints-00013543>

Lizenz:



CC-BY 4.0 International - Creative Commons, Namensnennung

Publikationstyp: Buch

Fachbereich: 16 Fachbereich Maschinenbau  
16 Fachbereich Maschinenbau

Quelle des Originals: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/13543>

---

# Isotrope Lichtstreuung in Papier - Neue Überlegungen zur Kubelka-Munk-Theorie

Vom Fachbereich Maschinenbau  
an der  
Technischen Hochschule Darmstadt  
zur  
Erlangung des Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

Dissertation

von  
Dipl.-Phys. Felix Berg  
aus Seeheim-Jugenheim

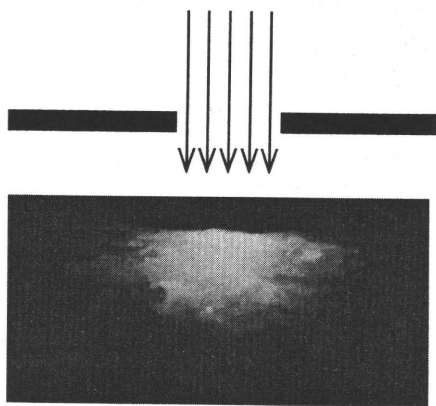
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Christoph Hars  
Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Lothar Göttsching  
Tag der Einreichung: 5. Dezember 1996  
Tag der mündlichen Prüfung: 23. April 1997

Darmstadt 1997

D 17



**meinen Eltern**



**Lichtstreuung in Papier**

## **Danksagung**

Themenfindung und grundlegende Vorarbeiten zu dieser Arbeit erfolgten am Fachgebiet für Druckmaschinen und Druckverfahren im Fachbereich Maschinenbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

Mein Dank gilt daher insbesondere Herrn Prof. Dr.-Ing. Christoph Hars für die begleitenden Gespräche und Diskussionen und die fortwährende Unterstützung nach meinem Ausscheiden aus dem Hochschuldienst.

Die Durchführung der Arbeit liegt maßgeblich im Zeitraum meiner Tätigkeit bei der Maschinenfabrik GOEBEL. Für den notwendigen Freiraum, der mir neben meiner Berufstätigkeit eingeräumt wurde, danke ich ausdrücklich der Geschäftsleitung der Maschinenfabrik GOEBEL.

Danksagen darf ich hier in besonderem Maße Herrn Hermann Thomas für seine persönliche Unterstützung, die mir die Möglichkeit eröffnete, diese wissenschaftliche Arbeit extern fortzuführen und zum Abschluß zu bringen.

Dank sagen möchte ich allen Mitarbeitern am Fachgebiet Druckmaschinen und Druckverfahren und den Kollegen im Hause GOEBEL, die mich bei meiner wissenschaftlichen Arbeit unterstützt und motivierend begleitet haben.

**Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit nur mit Hilfe der ausdrücklich angegebenen Hilfsmittel eigenständig verfaßt habe.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Felix Berg'. The signature is stylized, with the first name 'Felix' written in a cursive script and the last name 'Berg' in a more blocky, capital-letter style.

*Felix Berg*

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Danksagung .....	VII
Eidesstattliche Erklärung .....	VIII
1 Einleitung .....	1
2 Problemstellung .....	3
3 Strahlungsphysikalische Grundlagen .....	9
3.1 Grundgrößen .....	10
3.2 Densitometrie .....	15
4 Lichtstreuung an Rasterdrucken .....	17
4.1 Geometrischer Ansatz .....	17
4.2 MURRAY-DAVIES-Gleichung .....	19
4.3 YULE-NIELSEN-Gleichung .....	20
4.4 CLAPPER-YULE-Beschreibung .....	23
4.5 Streufunktionen .....	24
4.6 Fazit .....	28
5 Lichtstreuung an trüben Medien .....	29
5.1 KUBELKA-MUNK-Theorie .....	32
5.1.1 Differentieller Ansatz .....	33
5.1.2 Reflexionsgrad als Lösung .....	34
5.1.3 Koeffizientenbestimmung .....	36
5.1.3.1 Klassische Methode .....	36
5.1.3.2 Stapel-Methode .....	36
5.1.3.3 Zwei-Substrat-Methode .....	37
5.1.3.4 Fazit .....	37
5.1.4 Fehlerrechnung .....	38

	Seite
6	Neue Überlegungen zur KUBELKA-MUNK-Theorie ..... 41
6.1	Direkter Lösungsweg ..... 42
6.2	$\rho_{\infty}$ der Einzelschicht ..... 44
6.3	Gleichgewichtsbedingung ..... 44
6.4	Einfluß von $a$ , $s$ und $\rho_s$ ..... 47
6.5	$\rho_{\infty}$ der endlich dicken Schicht ..... 50
7	Lichtstreuung in Papier ..... 54
7.1	Versuchsaufbau ..... 54
7.2	Mikroskopaufnahmen ..... 55
8	Zweidimensionales Streumodell ..... 56
8.1	Streuansatz ..... 57
8.1.1	Streu- und Absorptionsanteile ..... 59
8.2	Bilanzgleichungen ..... 61
9	Isotrope Streuung ..... 64
9.1	Differentialgleichungssystem ..... 64
9.2	Fouriertransformation ..... 65
9.3	Lösung im Bildbereich der Fouriertransformation ( $\mathbf{x} \rightarrow \xi$ ) ..... 67
9.4	Trivialfall $\sigma = 0$ ..... 69
9.5	Analytische Rücktransformation für $E_o(\mathbf{x}) = 1$ ..... 70
9.6	Diskrete Rücktransformation ..... 72
10	Zusammenfassung ..... 78
	Mathematischer Anhang ..... 79
	Symbolliste ..... XI
	Literaturverzeichnis ..... XII

## 1 Einleitung

Bei den konventionellen Druckverfahren ist es erforderlich, Halbtonvorlagen mit kontinuierlichen Farbverläufen im Druckbild als Rasterflächen wiederzugeben. Die Rasterflächen werden durch das Druckverfahren auf den Bedruckstoff übertragen und geben dort den kontinuierlichen Farbverlauf der Vorlage durch in ihrer Größe variierende bedruckte Flächen wieder.

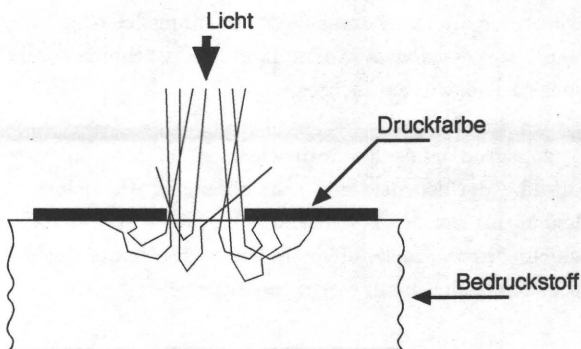
Lichtstreuung und Lichtabsorption sind notwendige physikalische Vorgänge im Bedruckstoff und in der Druckfarbe, die eine Abbildung eines Druckbildes überhaupt erst möglich machen. Licht, das auf ein Druckmuster fällt und von dort in einen Empfänger, das Auge oder ein Meßgerät, gelangt, wird aufgrund des unterschiedlichen Reflexionsverhaltens von Druckfarbe und Bedruckstoff verändert. Diese Veränderung hängt von den Flächenanteilen auf dem Bedruckstoff ab und ist meßbar durch den Reflexionsgrad einer untersuchten Probe. Der Reflexionsgrad ergibt sich aus dem Verhältnis von der Bestrahlungsstärke, der flächenbezogenen Strahlungsleistung des einfallenden Lichtes, zur spezifischen Ausstrahlung, der flächenbezogenen Strahlungsleistung des rückgestreuten Lichtes.

Der Reflexionsgrad eines Rasterdruckes ist im Idealfall nur vom Flächendeckungsgrad  $\varphi$  der bedruckten Fläche abhängig. Idealisiert ist dabei, daß die Lichtreflexion nur auf der Bedruckstoffoberfläche erfolgt und das Licht nicht in die Schicht des Bedruckstoffes eindringt. Die heute angewandten Berechnungsmethoden basieren auf dieser Idealvorstellung.

Die optischen Eigenschaften des Bedruckstoffes als Träger der gedruckten Rasterflächen haben neben weiteren physikalischen oder chemischen Eigenschaften eine grundlegende Bedeutung bei der Bewertung eines Druckmusters - unabhängig ob visuell oder meßtechnisch bewertet wird.

Im Realfall wird der Reflexionsgrad eines Rasterdruckes jedoch auch durch Lichtstreuungsvorgänge innerhalb des Bedruckstoffes und der Druckfarbe beeinflußt. Lichtstreuung und Lichtabsorption in der lichtstreuenden Schicht des Bedruckstoffes (und der Druckfarbe) bewirken eine deutliche Abweichung vom Idealfall.

Durch Lichtstreuereffekte und Absorptionsvorgänge wird die spezifische Ausstrahlung gemindert. Dies geschieht dadurch, daß bei einem Rasterdruck das zwischen den bedruckten Flächen in die teildurchlässige, streuende Schicht des Bedruckstoffes eintretende Licht beim Wiederaustritt aus dieser Schicht von „innen“ auf die Druckfarbe gelangt - das Licht wird „gefangen“. Der Reflexionsgrad der unbedruckten Zwischenflächen wird dadurch herabgesetzt. In der Literatur wird dieses Phänomen „Lichtfang-Effekt“ oder „YULE-NIELSEN-Effekt“ genannt. Die Lichtstreuung wird hier nicht wellenlängenabhängig betrachtet, und die Druckfarbe steht für eine ideal lichtundurchlässige Schicht. YULE und NIELSEN konnten erstmals 1951 durch Messungen nachweisen, daß der Reflexionsgrad eines Rasterdruckes nicht allein aus der geometrischen Flächendeckung bestimmt werden kann /YULE, 1951/. Der Lichtfang-Effekt ist zur Verdeutlichung der physikalischen Vorgänge in Abb. 1.1 schematisch dargestellt. Das Licht ist dabei, wie in der Strahlenoptik üblich, durch Einzelstrahlen symbolisiert.



**Abb. 1.1:** Lichtfang-Effekt: Licht dringt an nichtbedruckten Stellen in den Bedruckstoff ein, wird dort mehrfach gestreut und trifft teilweise von „innen“ auf die Grenzschicht Bedruckstoff-Druckfarbe - das Licht wird „gefangen“.

/YULE, 1951/

J.A.C. Yule, W.J. Nielsen,  
*The Penetration of Light into Paper  
 and its Effect on Halftone Reproduction,*  
 TAGA Proc. (1951), 65 - 76



## 2 Problemstellung

In der Drucktechnik wird zur meßtechnischen Bewertung von Druckmustern üblicherweise nicht der Reflexionsgrad direkt verwendet. Die sog. optische Dichte  $D$  ist hier die gebräuchliche Bewertungsgröße. Die optische Dichte, bei Reflexion bzw. Transmission, ist definiert als dekadischer Logarithmus des reziproken Reflexionsgrades  $\rho$  bzw. des Transmissionsgrades  $\tau$ :

$$D = \log \left[ \frac{1}{\rho} \right] \quad (\text{Reflexion})$$

$$D^* = \log \left[ \frac{1}{\tau} \right] \quad (\text{Transmission})$$

Der reproduktionstechnische Prozeß von der Vorlage zum Rasterdruck ist unterschiedlichen Einflüssen unterworfen. Bei jedem Verfahrensschritt kann dabei eine Veränderung stattfinden. Eine Veränderung bei den unterschiedlichen Prozeßschritten von der Vorlage bis hin zum Druckbild ist in der Änderung der optischen Dichtewerte meß- und darstellbar.

Der mathematische Zusammenhang zwischen der Flächendeckung des Rasterpositivs  $\varphi_P$  und der Dichte des Rasterdruckes  $D_R$  wird in Form der drucktechnischen Kennlinie dargestellt, die durch die nachfolgende idealisierende Gleichung beschrieben wird:

$$D_R = -\log [\varphi_P \cdot 10^{-D_F} + (1 - \varphi_P) \cdot 10^{-D_B}]$$

$D_F$  = optische Dichte der Farbschicht  
auf dem Bedruckstoff (Volltondichte)

$D_B$  = optische Dichte des Bedruckstoffes

Dabei ist die Annahme gemacht, daß der Flächendeckungsgrad bei der Übertragung vom Rasterpositiv auf die Druckform und weiter bis zum Druckbild auf dem Bedruckstoff unverändert erhalten bleibt.

Entgegen dieser idealisierenden Annahme ist bekannt, daß der Flächendeckungsgrad während bzw. aufgrund des Druckprozesses im allgemeinen zunimmt. Besonders anschaulich ist die daraus sich ergebende „Punktvergrößerung“ bei den Hochdruckverfahren. Durch einen „Quetscheffekt“ bei der Farbübertragung auf den Bedruckstoff oder beim indirekten Druck auf den Gummituchzylinder wird der Flächendeckungsgrad erhöht; die zu druckenden Flächenelemente werden vergrößert.

Auch beim Flachdruckverfahren tritt eine Vergrößerung der drucktechnisch übertragenen Flächenelemente abhängig von den Maschineneinstellungen und den Eigenschaften der am Druckprozeß beteiligten Materialien mehr oder weniger stark auf. Dies führt dazu, daß die optische Dichte im Druckbild allein schon verfahrensbedingt, aber auch verfahrensabhängig, gegenüber der idealen Übertragungsfunktion zu höheren Werten hin abweicht. Der Flächendeckungsgrad bleibt also gegenüber den Ursprungswerten des Rasterpositivs  $\varphi_p$  nicht erhalten. Der letztlich im Druckbild vorliegende Flächendeckungsgrad wird in der Literatur als geometrischer Flächendeckungsgrad  $\varphi_g$  bezeichnet.

Das Ausmaß der verfahrensbedingten Punktvergrößerung ist sehr individuell von der Druckmaschine und von deren Einstellwerten und drucktechnischen Parametern abhängig. Nicht zuletzt spielen grenzflächenphysikalische und chemische Eigenschaften der Druckfarbe und des Bedruckstoffes eine entscheidende Rolle.

Im Offsetdruck liegt die verfahrensbedingte Flächendeckungszunahme etwa zwischen 10 % und 20 % bei einer Flächendeckung  $\varphi_p = 0,5$  und bei Verwendung eines gestrichenen Papiers. Die rein verfahrensbedingte Änderung der optischen Dichte eines Rasterdruckes wurde an anderer Stelle ausführlich diskutiert und soll daher hier nicht weitergehend vertieft werden /GRINBERG, 1991/.

---

/GRINBERG, 1991/

M. Grinberg, V. V. Krongauz,  
*Dot Gain and Shape Distortion in Halftone Printing,*  
Journal of Imaging Science 35 (1991), Nr. 3, 158 - 163

---

Im realen Fall hat die aufgedruckte Farbschichtdicke einen Einfluß auf die meßbare optische Dichte, das soll aber an dieser Stelle nicht betrachtet werden. Sehr umfassend wird der verfahrensbedingte Einfluß auf die Punktvergrößerung in den Arbeiten von DePAOLI und von GRAEVES beschrieben /DePAOLI, 1981; /GRAEVES, 1987/.

Der Unterschied zwischen einer idealen und der realen Dichteübertragungsfunktion ist nicht allein auf druckverfahrensbedingte Vorgänge zurückzuführen. Dies ist daran zu erkennen, daß die densitometrisch erfaßbare optische Dichte nicht mit den aus der geometrischen Flächendeckung errechenbaren Dichtewerten übereinstimmt. Ursache für diesen Unterschied ist der einleitend beschriebene Lichtfang-Effekt. Rastertonwerte erscheinen „dunkler“, als sie aufgrund der geometrischen Flächendeckung und der Farbschichtdicke zu erwarten sind.

Die Anteile der durch den Lichtfang-Effekt scheinbar hervorgerufenen Punktvergrößerung und der verfahrensbedingten tatsächlichen Punktvergrößerung lassen sich als Veränderung der drucktechnischen Kennlinie darstellen. Zur Verdeutlichung der Größenordnung des „Lichtfang-Effektes“ sind in Abb. 2.1 der Einfluß der Lichtstreuung und die verfahrensbedingte Veränderung der drucktechnischen Kennlinie qualitativ dargestellt. Die Anteile des Lichtfang-Effektes, die zur Abweichung von der drucktechnischen Kennlinie führen, können dabei nach dem momentanen Wissensstand nur grob abgeschätzt werden.

---

/DePAOLI, 1981/

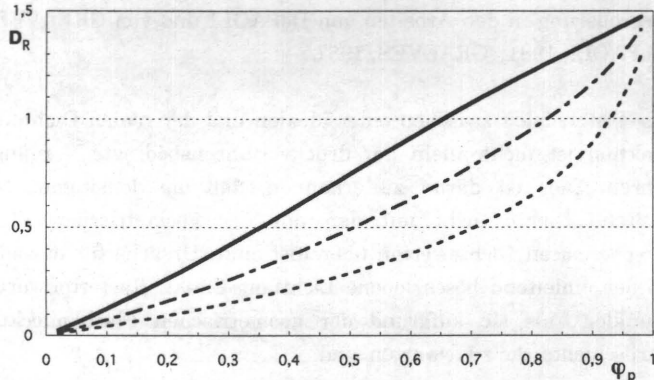
A. DePaoli,  
*The Effect of Printing Conditions on Dot Gain,*  
TAGA Proc. (1981), 17 - 42

/GRAEVES, 1987/

P. Greaves, B. Sunderland,  
*Dot Gain, What is the Problem?*  
TAGA Proc. (1987), 41 - 53

---

Die verfahrensbedingte Punktvergrößerung wurde nach empirischen Werten von HUNTSMAN bestimmt /HUNTSMAN, 1987/



**Abb. 2.1:** Drucktechnische Kennlinie und deren Veränderung durch verfahrensbedingte Punktvergrößerung und Lichtfang-Effekt. Die Lichtfanganteile wurden nach der YULE-NIELSEN-Gleichung berechnet:

- ideale drucktechnische Kennlinie nach Gleichung 4.3
- . - . - Kennlinie bei verfahrensbedingter Flächendeckungszunahme (20% bei  $\varphi = 0,5$ ) ohne Lichtstreuanteil (nach HUNTSMAN)
- reale Kennlinie mit Lichtstreuanteil nach Gleichung 4.8 (Lichtstrefaktor  $n = 2$ )

Die Abweichung von der drucktechnischen Ideal-Kennlinie, die durch den Lichtfang-Effekt bewirkt wird, ist nicht vernachlässigbar. Abhängig vom Bedruckstoff liegt die Verschiebung der drucktechnischen Kennlinie in gleicher Größenordnung wie der verfahrensbedingte Anteil der Dichtezunahme. Es soll durch die Darstellung der Abb. 2.1 deutlich werden, daß eine bedruckstoffbezogene Korrektur des Flächendeckungsgrades bei der Herstellung der Druckform in gleicher Weise zu berücksichtigen ist wie die bereits praxisübliche Korrektur der verfahrensbedingten Flächendeckungszunahme.

/HUNTSMAN, 1987/

J. R. Huntsman,  
A new Model of Dot Gain and its Application to a Multilayer Color Proof,  
TAGA Proc. (1987)

Im dargestellten Fall sind die Veränderungen zur drucktechnischen Ideal-Kennlinie nahezu gleich groß. Der Reflexionsgrad bzw. die optische Dichte eines Rasterdruckes ist aufgrund des Lichtfang-Effektes nicht eindeutig durch den geometrischen Flächendeckungsanteil der gedruckten Flächenelemente bestimmt. Der Messung zugänglich ist nur ein „optisch wirksamer“ Flächendeckungsgrad  $\varphi_o$ . Dieser optisch wirksame Flächendeckungsgrad  $\varphi_o$  ist größer als der tatsächlich vorliegende geometrische Anteil:

$$\varphi_o > \varphi_g$$

Die Größe des Unterschiedes hängt von den optischen Eigenschaften des Bedruckstoffes ab, dem geometrischen Flächendeckungsgrad und insbesondere von der Größe und Form der gedruckten Flächenelemente. Stark lichtstreuende Bedruckstoffe zeigen einen ausgeprägten Lichtfangeffekt und eine deutliche Verschiebung der drucktechnischen Kennlinie.

Der Lichtfang-Effekt ist ein „Randeffekt“. Er tritt auf an den freien Kanten, den Rändern, der gedruckten Flächenelemente und führt dort zur scheinbaren Vergrößerung dieser Druckflächen. Tatsächlich bewirkt der Lichtfang-Effekt eine Verringerung des Reflexionsgrades in der Umgebung der Druckpunktkanten. Der Anteil der freien Kantenlänge bezogen auf eine Flächeneinheit bestimmt neben den optischen Parametern des Bedruckstoffes den Lichtfang-Anteil und damit die Abweichung von der drucktechnischen Ideal-Kennlinie. Die Berechnung der freien Kantenlänge bei verschiedenen Rasterverfahren und unterschiedlicher Flächendeckung wurde in der Arbeit von URBAN für unterschiedliche Rasterverfahren diskutiert und abhängig von der Flächendeckung dargestellt - hier daher nur der Literaturhinweis auf diese Berechnungen /URBAN, 1993/. Die freie Kantenlänge der Rasterpunkte nimmt mit kleinerwerdenden Rasterelementen - bei gleicher Flächendeckung - zu. Der Lichtfang-Effekt wird aber wieder abnehmen, sobald die Rasterpunktgröße die mittlere Streulänge des Lichtes im Bedruckstoff unterschreitet. Der Anteil des Lichtfang-Effektes wird dann im wesentlichen nur noch von der geometrischen Flächendeckung selbst beeinflusst.

---

/URBAN, 1993/

P. Urban,

*Bewertung der frequenzmodulierten Bildraasterungsverfahren*

Dissertation an der TH Darmstadt (1993)

---

Die übertragene Farbschichtdicke ist bei Rasterdrucken im allgemeinen geringer als bei vollflächigem Druck. Mit kleiner werdenden Rasterpunkten, bei konstanter Flächendeckung, nimmt zudem die Farbschichtdicke ab /GÖLLING, 1988/. Der optisch wirksame, d.h. der meßbare Flächendeckungsgrad wird dadurch zusätzlich verfälscht. Es ergeben sich hieraus geringere Lichtfanganteile.

Ziel dieser Arbeit ist, das Streu- und Absorptionsverhalten im Hinblick auf das Phänomen Lichtfang im Bedruckstoff modellhaft und gleichzeitig dennoch allgemeingültig zu beschreiben. Es soll hier eine zweidimensionale analytische Beschreibung der Lichtstreuung in der Schicht des Bedruckstoffes formuliert werden.

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist insbesondere die Theorie zur „Optik der Farbanstriche“ von KUBELKA und MUNK /KUBELKA, 1931/. Deren Anwendbarkeit zur Charakterisierung lichtstreuender Schichten, insbesondere auch bei Bedruckstoffen, hat sich bewährt und soll daher auch als Grundlage neuer Überlegungen dienen. Die Formulierung der Theorie zur „Optik der Farbanstriche“ wird erweitert. Dabei lassen sich einige verwendete Begriffe exakter fassen. Die Anwendbarkeitsgrenzen der KUBELKA-MUNK-Theorie werden anhand einer Fehlerbetrachtung aufgezeigt. Strahlungsphysikalische Grundlagen sind die Basis dieses analytischen Ansatzes. Sie sollen daher den folgenden Überlegungen vorangestellt werden.

---

/GÖLLING, 1988/

S. Gölling, K. R. Scheuter,  
*Die Sicherheit der Farbübertragung  
bei kleinsten Bildpunkten im Offsetdruck,*  
Fachgebiet Druckmaschinen und Druckverfahren,  
TH Darmstadt, Bericht 2 (1986)

/KUBELKA, 1931/

P. Kubelka, F. Munk,  
*Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche,*  
Zeits. f. techn. Physik 12 (1931), 593 - 601

---

### 3 Strahlungsphysikalische Grundlagen

Zur Bewertung der Lichtstreuung findet die Photometrie Anwendung. Sie befaßt sich mit der Messung des Lichtes, d. h. der sichtbaren elektromagnetischen Strahlung. Oft interessieren dabei nicht die rein physikalischen Größen, sondern der *Sinneseindruck des Lichtes*. Der Zusammenhang zwischen den physiologischen und physikalischen Größen ist recht komplex, da das Auge eine frequenz- und intensitätsabhängige Empfindlichkeit aufweist. Es wurden deshalb die physiologischen Einheiten der Photometrie zusätzlich zu den rein physikalischen Einheiten als Basis in das SI-Einheitensystem <sup>/3.1/</sup> aufgenommen.

Im Gegensatz zur Literatur werden aber im folgenden ausschließlich strahlungsphysikalische Größen verwendet, da die objektive Bewertung der Streuvorgänge nur meßtechnisch erfolgen kann und der Sinneseindruck dabei zunächst keine Rolle spielt. Diese Vorgehensweise soll insbesondere dem besseren Verständnis dieser Arbeit dienen, da dadurch mehrdeutige Begriffe vermieden werden.

Die lichttechnischen, d. h. physiologischen Größen werden an entsprechender Stelle bei Bedarf angeführt und erläutert; detaillierte Darstellungen der lichttechnisch, physiologisch relevanten Größen sind darüber hinaus in der nachfolgend zitierten Literatur zu finden: /RICHTER, 1980/ und /BERGMANN, 1978/.

---

/3.1/ *Internationales Einheitensystem (Système International d'Unités, SI)*

Dieses Einheitensystem wurde empfohlen von der „Conférence Générale des Poids et Mesures“, Paris (1960)

/RICHTER, 1980/

M. Richter,  
*Einführung in die Farbmatrik*,  
2. Aufl. (1980), Berlin, New York: de Gruyter

/BERGMANN, 1978/

L. Bergmann,  
*Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 3. Optik*,  
7. Aufl. (1978), Berlin, New York: de Gruyter

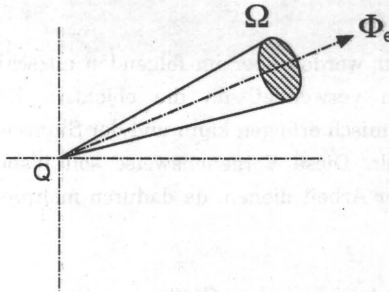
---

### 3.1 Grundgrößen

Eine als punktförmig angenommene Strahlungsquelle strahlt isotrop in alle Raumrichtungen.

Die von der Strahlungsquelle pro Zeiteinheit ausgestrahlte *Strahlungsenergie*, die *Strahlungsleistung*  $\Phi_e$ , ist dem Raumwinkel  $\Omega$  proportional <sup>/3.2/</sup>:

$$\Phi_e = I_e \Omega \quad (3.1)$$



**Abb. 3.1:** Eine isotrope, punktförmige Lichtquelle (Q) strahlt in den Raumwinkel  $\Omega$  die Strahlungsleistung  $\Phi_e = I_e \Omega$

Der Proportionalitätsfaktor  $I_e$  hängt von den Eigenschaften der Strahlungsquelle ab.  $I_e$  wird als *Strahlstärke* bezeichnet.

<sup>/3.2/</sup> Der Index „e“ (energiebezogen) deutet auf den Bezug zur Strahlungsenergie hin. Er soll hier verwendet werden, um eine mögliche Verwechslung mit photometrischen Größen zu vermeiden; diese erhalten üblicherweise zur deutlichen Kennzeichnung den Index „v“ (visuell).



In der Literatur wird der Begriff *Intensität* oftmals ungenau für die *Strahlstärke* verwendet. Da der Intensitätsbegriff aber mehrdeutig Anwendung findet, sollte man ihn in diesem Zusammenhang unbedingt vermeiden <sup>/3.3/</sup>.

Zur Bewertung elektromagnetischer Strahlung wird die Wirkung der Strahlung auf Materie *beobachtet*. Meßbar ist als Wirkung z. B. die Erwärmung oder eine Ladungsänderung. Ein so funktionierendes Strahlungsmeßgerät, im folgenden kurz „Empfänger“ genannt, mißt die ihm in bestimmter Zeit zugesandte Energie - die Strahlungsleistung  $\Phi_e$ , die an der Meßfläche  $A_b$  ankommt. Die Strahlungsleistung ist proportional der Empfängermeßfläche, d. h. dem Raumwinkel  $\Omega$ , unter dem der Empfänger von der Strahlungsquelle „gesehen“ wird.

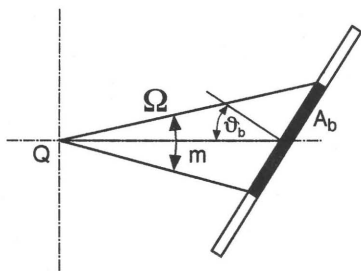


Abb. 3.2:

Zur Definition der Bestrahlungsstärke:

$m$  = Mittenabstand zwischen Strahlungsquelle und Empfängermeßfläche

$\vartheta_b$  = „Beobachtungswinkel“

(Winkel zwischen  $m$  und Normalenvektor zur Empfängermeßfläche)

$A_b$  = „beobachtende“ (b) Empfängermeßfläche

$\Omega$  = Raumwinkel der auf  $A_b$  meßbaren Strahlung

/3.3/ Auch die nachfolgend definierte Strahldichte  $[W/m^2]$  wird häufig als Intensität bezeichnet. Der Begriff der „Intensität“ ist in der Physik bereits zur Beschreibung eines Wellenfeldes besetzt. Die Intensität eines Wellenfeldes hat die Dimension einer Leistung pro Flächeneinheit  $[W/m^2]$ .

In der Thermodynamik wird zur Bestimmung der Intensität die Leistung meist auf eine Volumeneinheit bezogen  $[W/m^3]$ .

Die durch einen Empfänger mit der „beobachtenden“ Meßfläche  $A_b$  meßbare Strahlungsleistung  $\Phi_e$  läßt sich mit den in Abb. 3.2 definierten geometrischen Größen beschreiben:

$$\Phi_e = I_e \frac{A_b \cos \vartheta_b}{m^2} \quad [ \text{ mit } \frac{A_b \cos \vartheta_b}{m^2} = \Omega ] \quad (3.2)$$

Aus Gl. (3.2) ist die Größe der Bestrahlungsstärke  $E_e$  herleitbar.

Die Bestrahlungsstärke ist die auf die Flächeneinheit  $A_b$  pro Zeiteinheit auftreffende Energie:

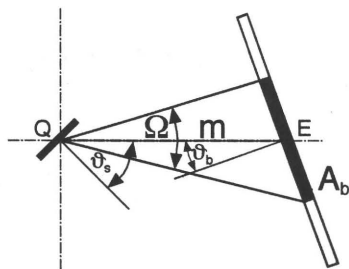
$$E_e = \frac{\Phi_e}{A_b} = I_e \frac{\cos \vartheta_b}{m^2} \quad (3.3)$$

Betrachtet werden sollen aber nicht punktförmige Strahler, sondern reale, flächenhafte Strahler - alle Strahler sind mehr oder weniger ausgedehnte Körper. Die Strahlungsleistung, die aus der Strahlerfläche austritt, ist in diesem Falle nicht mehr isotrop.

Für die Strahlungsleistung eines flächenhaften, ebenen Strahlers gilt analog zur Gl. 3.1:

$$\Phi_e = I_e (\vartheta_s) \Omega \quad (3.4)$$

Die Strahlstärke  $I_e (\vartheta_s)$  wird abhängig vom Ausstrahlungswinkel  $\vartheta_s$  und muß empirisch bestimmt werden.



**Abb. 3.3:** Strahlungsleistung, ausgehend von einem flächenhaften Strahler (Q), gemessen („beobachtet“) auf der Meßfläche  $A_b$  des Empfängers (E):  
 $m$  = Mittenabstand zwischen Strahlungsquelle und Empfängermeßfläche  
 $\vartheta_b$  = „Beobachtungswinkel“ (Winkel zwischen  $R$  und Normalenvektor zur Empfängermeßfläche)  
 $\vartheta_s$  = „Ausstrahlungswinkel“ (Winkel zwischen  $m$  und Normalenvektor zur Fläche der Strahlungsquelle)  
 $A_b$  = „beobachtende“ (b) Empfängermeßfläche  
 $A_s$  = „strahlende“ (s) Fläche der Strahlungsquelle  
 $\Omega$  = Raumwinkel der auf  $A_b$  meßbaren Ausstrahlung

In vielen Fällen gilt für die Winkelabhängigkeit der Strahlstärke  $I_e$  ( $\vartheta_s$ ) das von LAMBERT aufgestellte Cosinus-Gesetz:

$$I_e(\vartheta_s) = I_e A_s \cos \vartheta_s \quad (3.5)$$

LAMBERT beschreibt damit eine der Erfahrung entnommene Gesetzmäßigkeit. Sie gilt streng für eine kleine Öffnung eines als Strahlungsquelle dienenden „schwarzen Körpers“. Gleichmäßig rauhe, diffus reflektierende und ebene Flächen mit einem hohen Streuvermögen zeigen ebenfalls in sehr guter Näherung ein Verhalten nach dem Cosinus-Gesetz von LAMBERT <sup>/3.4/</sup>.

Ist das Cosinusetz von LAMBERT bei einer Strahlungsquelle näherungsweise erfüllt, so spricht man von einem „LAMBERT-Strahler“.

<sup>/3.4/</sup> Diffus reflektierende Flächen und ein sog. „schwarzer Körper“ haben ein Merkmal gemeinsam: Bei beiden ist das Extinktionsvermögen, d. h. das Verhältnis von absorbiert zur einfallenden Strahlungsleistung, unabhängig vom Einfallswinkel..

Bedruckstoffe, insbesondere die meist verwendeten Papiere, erfüllen mit Ausnahme einiger Spezialfälle (z. B. Hochglanzpapiere oder metallisierte Papiere) die Bedingung eines LAMBERT-Strahlers recht gut. Die Strahlungsleistung läßt sich mit Hilfe des LAMBERT-Gesetzes umschreiben zu:

$$\Phi_e = L_e A_s \cos \vartheta_s \Omega \quad (3.6)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $L_e$  ist von den Eigenschaften der strahlenden Fläche  $A_s$  abhängig und wird als *Strahldichte* bezeichnet. Die auf die Flächeneinheit bezogene Strahlungsleistung  $\Phi_e / A_s$  ergibt die *spezifische Ausstrahlung*  $M_e$  in Richtung Empfänger:

$$M_e = \frac{\Phi_e}{A_s} = L_e \cos \vartheta_s \Omega \quad (3.7)$$

Die spezifische Ausstrahlung entspricht in ihrer Dimension der Bestrahlungsstärke  $E_e$  (Gl. 3.4). Sie charakterisiert aber als strahlungsphysikalische Größe die Eigenschaft der von einer Fläche  $A_s$  ausgehenden Strahlung, während die Bestrahlungsstärke - wie der Name sagt - die auf eine Fläche  $A_b$  auftreffende Strahlung beschreibt. Trifft Licht mit der Strahlungsleistung  $\Phi_{eo}$  auf eine Schicht, so kann ein Teil  $\Phi_{er}$  in der Schicht reflektiert werden, ein weiterer Teil  $\Phi_{et}$  tritt an der der bestrahlten Seite abgewandten Seite aus der Schicht aus, und schließlich kann ein dritter Anteil  $\Phi_{ea}$  innerhalb der Schicht absorbiert werden.

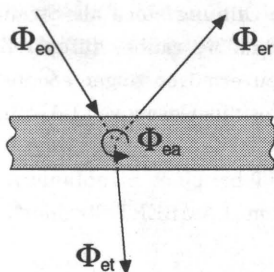


Abb. 3.4: Strahlungsleistungsbilanz an einer streuenden und absorbierenden Schicht.

Aufgrund dieser Eigenschaften werden drei Stoffkennzahlen zur Beschreibung des optischen Verhaltens einer zu untersuchenden Schicht definiert:

$$\text{der Reflexionsgrad} \quad \rho = \frac{\Phi_{\text{er}}}{\Phi_{\text{eo}}} \quad (3.8)$$

$$\text{der Transmissionsgrad} \quad \tau = \frac{\Phi_{\text{et}}}{\Phi_{\text{eo}}} \quad (3.9)$$

$$\text{der Absorptionsgrad} \quad \alpha = \frac{\Phi_{\text{ea}}}{\Phi_{\text{eo}}} \quad (3.10)$$

Die Stoffkennzahlen  $\rho$ ,  $\tau$  und  $\alpha$  sind dimensionslos. Der Reflexionsgrad  $\rho$ , der Transmissionsgrad  $\tau$  und der Absorptionsgrad  $\alpha$  sind durch die Gleichung

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (3.11)$$

aufgrund der Gesetzmäßigkeit der Energieerhaltung miteinander verknüpft. Die Stoffkennzahlen sind i. a. wellenlängenabhängig. Soll diese Wellenlängenabhängigkeit betont werden, so spricht man von „spektralen“ Größen. Eine Abhängigkeit vom Beobachtungswinkel tritt in der Regel ebenfalls auf. Die Verteilung der Stoffkennzahlen in Gl. 3.11 ist dann winkelabhängig.

### 3.2 Densitometrie

Im Bereich der Drucktechnik und der graphischen Industrie wird an Stelle des Reflexionsgrades üblicherweise die *optische Dichte*  $D$  als Meßwert zur Beurteilung von Rasterdrucken verwendet; diese ist wie folgt definiert:

$$D = \log \frac{1}{\rho} \quad \text{bzw.} \quad D = \log \frac{1}{\tau} \quad (3.12)$$

bei Auflichtbeobachtung

bei Durchlichtbeobachtung

Mit Hilfe der Definition der optischen Dichte wird das Lichtreflexions- bzw. Lichttransmissionsverhalten, z. B. eines Rasterdruckes oder eines vollflächigen Druckmusters oder von transparenten Filmen, in einem logarithmischen Maßstab dargestellt. Diese Umrechnungsvorschrift trägt dem menschlichen Wahrnehmungsvermögen Rechenschaft und stellt quasi das

optische Analogon zum akustischen WEBER-FECHNERSchen Gesetz dar: „Bei jeder Verdopplung der Schallstärke nimmt die empfundene Lautstärke um einen konstanten Betrag zu.“ Die Empfindung ist in weiten Bereichen in guter Näherung proportional dem Logarithmus des physikalischen Reizes.

Zur Erfassung der Meßgröße „optische Dichte“ wurden spezielle Meßgeräte entwickelt, sog. Densitometer, die in der Literatur eingehend beschrieben sind /TESCHNER, 1989/. Zur Beurteilung von Druckmustern werden Auflichtdensitometer eingesetzt, während Durchlichtdensitometer zur meßtechnischen Erfassung von Durchsichtvorlagen dienen. Die oben beschriebene Winkelabhängigkeit der Stoffkennzahlen wird durch eine definierte Meßgeometrie berücksichtigt.

---

/TESCHNER, 1989/

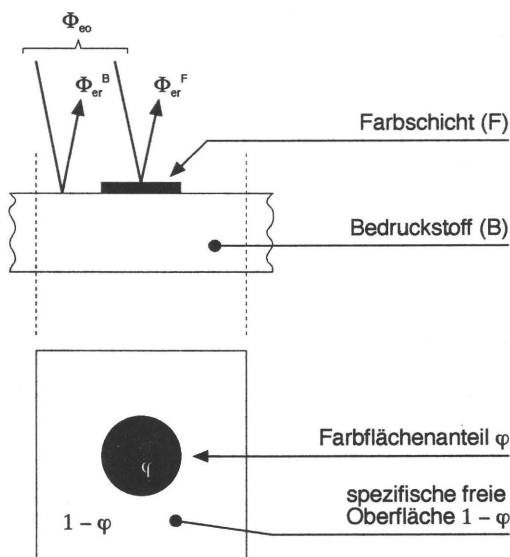
H. Teschner,  
Offsetdrucktechnik,  
6. Aufl. (1989), Fachschriften-Verlag, Fellbach

---

## 4. Lichtstreuung an Rasterdrucken

### 4.1 Geometrischer Ansatz

Zur Untersuchung des Lichtstreuerverhaltens von Rasterdrucken ist es zunächst hilfreich, von einem geometrisch vereinfachenden Modell auszugehen, wie es in Abb. 4.1 dargestellt ist.



**Abb. 4.1:** Geometrisches Modell zur Beschreibung der Lichtreflexion an einem Rasterdruck. Dargestellt ist ein Rasterpunkt, der den Flächenanteil  $\varphi$  bedeckt

$\Phi_{eo}$	einfallende Strahlungsleistung
$\Phi_{er}^B$	reflektierte Strahlungsleistung von der Bedruckstoffoberfläche
$\Phi_{er}^F$	reflektierte Strahlungsleistung von der Farbschichtoberfläche
$\varphi$	Flächendeckungsgrad
$1 - \varphi$	spezifische freie Bedruckstoffoberfläche

Der Bedruckstoff (B) stellt hierbei eine streuende Schicht dar, die idealisiert das auftreffende Licht nur an der Oberfläche reflektiert. Unberücksichtigt bleiben dabei die tatsächlich stattfindenden physikalischen Streuvorgänge im Bedruckstoffinneren.

Die Farbschicht (F) der Druckfarbe des Rasterpunktes wird als gleichmäßig dicke Schicht betrachtet, die einen konstanten Reflexionsgrad über die gesamte Rasterpunktfläche aufweist.

Der Reflexionsgrad  $\rho_R$  des Rasterdruckes setzt sich bei diesem einfachen geometrischen Modell aus dem Reflexionsgrad der Farbschicht  $\rho_F$  und dem Reflexionsgrad des Bedruckstoffes  $\rho_B$ , die entsprechend den jeweiligen Flächenanteilen gewichtet werden, zusammen:

$$\rho_R = \varphi \rho_F + (1 - \varphi) \rho_B \quad (4.1)$$

wobei für den Reflexionsgrad gilt:

$$\rho_x = \frac{\Phi_x^{\text{er}}}{\Phi_{\text{eo}}} \quad \text{mit } x = F \text{ bzw. } B \quad (4.2)$$

Für die Dichte  $D_R$  eines Rasterdruckes mit dem Flächendeckungsgrad  $\varphi$  folgt nach der Definitionsgleichung 3.12:

$$D_R = -\log [ \varphi 10^{-D_F} + (1 - \varphi) 10^{-D_B} ] \quad (4.3)$$

Ausgehend von diesem vereinfachenden geometrischen Modell, wurden mehrere Ansätze gemacht, den Lichtfang-Effekt durch eine parametrisierte Darstellung oder eine funktionale Abhängigkeit zwischen geometrischer Flächendeckung und der durch die Lichtstreuung im Bedruckstoff bedingten optisch meßbaren Flächendeckung zu beschreiben.

Die für die Praxisanwendung bedeutendsten Modellvorschläge sind in den nachfolgenden Kapiteln 4.2 bis 4.4 zusammengefaßt dargestellt.



## 4.2 MURRAY-DAVIES-Gleichung

Die erste wichtige Beschreibung der optischen Dichte gerasterter Druckmuster geht zurück auf A. MURRAY und E. R. DAVIES /MURRAY, 1936/.

MURRAY machte die Annahme, daß die optische Dichte  $D_R$  eines einfarbigen Rasterdruckes als Funktion des Flächendeckungsgrades  $\varphi$  der Druckpunktfläche und des Reflexionsgrades  $\rho_F$  der Druckfarbe entsprechend dem geometrischen Ansatz vollständig zu beschreiben sei. MURRAY und DAVIES formulierten diesen Zusammenhang, der als MURRAY-DAVIES-Gleichung in die Literatur einging.

$$D_R = \log \frac{1}{1 - \varphi (1 - \rho_F)} \quad (4.4)$$

Die MURRAY-DAVIES-Gleichung folgt direkt aus dem rein geometrischen Ansatz des Kapitels 4.1. Mit der Annahme, daß der Reflexionsgrad des Bedruckstoffes  $\rho_B = 1$  ist, d.h. ein ideal reflektierender Bedruckstoff vorliegt, folgt die Gl. 4.4 mit Hilfe der Definitionsgleichung für die optische Dichte (Gl. 3.12) aus der Gl. 4.1.

Die weitaus bekanntere Form der MURRAY-DAVIES-Gleichung erhält man entsprechend mit  $D_B = 0$  aus Gl. 4.3:

$$D_R = -\log [1 - \varphi (1 - 10^{-D_F})] \quad (4.5)$$

Die letztlich interessierende Flächendeckung ist gemäß der Funktion

$$\varphi = \frac{1 - 10^{-D_R}}{1 - 10^{-D_F}} \quad (4.6)$$

von der Dichte des Rasterdruckes  $D_R$  und der Dichte der bedruckten Fläche  $D_F$  abhängig.

---

/MURRAY, 1936/

A. Murray,  
*Monochrome Reproduktion in Photoengraving*,  
 J. Franklin Inst. 221 (1936), 721 - 744

Zur Verifizierung der aufgestellten Funktion bestimmte MURRAY den Flächendeckungsgrad der Rasterdruckproben planimetrisch mit Hilfe eines Mikroskops und verglich diese Werte mit den aus gemessenen Dichtewerten gemäß Gl. 4.6 berechneten Flächendeckungen.

Die Messungen, die MURRAY und DAVIES zur Überprüfung ihres Modells durchführten, stimmten innerhalb der Meßungenauigkeiten durchaus mit ihrem geometrischen Ansatz überein.

### 4.3 YULE-NIELSEN-Gleichung

Erst mit höherer Meßgenauigkeit der densitometrischen Messungen zeigten sich die Abweichungen zwischen den mit Hilfe der MURRAY-DAVIES-Gleichung berechneten Flächendeckungswerten und den planimetrisch bestimmten Rasterpunktgrößen.

J. YULE vermutete, daß der Einfluß der Lichtstreuung aufgrund der Lichtausbreitung innerhalb des Bedruckstoffes dazu führte, daß Rastertonwerte dunkler erscheinen, als sie aufgrund der geometrischen Flächendeckung zu erwarten sind /YULE, 1943/.

J. YULE und W. NIELSEN veröffentlichten 1951 ihre Untersuchungen, mit denen sie zeigen konnten, daß die einfache geometrische Beziehung von MURRAY und DAVIES zwischen den Werten der optischen Dichte und der geometrischen Flächendeckung die Realität nur unzureichend beschreibt /YULE, 1951/.

Durch mikroskopische Aufnahmen der Projektion eines leuchtenden Glühfadens auf die Oberflächen unterschiedlich lichtstreuender Schichten konnten sie den Einfluß der Schicht auf das Streuverhalten anschaulich zeigen.

---

/YULE, 1943/

J. A. C. Yule,  
*Theory of the Halftone Process.*  
*III. Dot Size and Halftone Density,*  
J. Franklin Inst. 236 (1943), 473 - 487

---

YULE und NIELSEN erkannten damit die Ursachen des Lichtfang-Effektes in der Ausbreitung und Streuung des Lichtes im Inneren der Schicht des Bedruckstoffes.

Die Lichtstreuung, die zur Ausbreitung des Lichtes führt, läßt sich durch optische Konstanten, wie Brechungsindex, Streu- und Absorptionskoeffizienten, beschreiben. Entsprechende Formulierungen sind aber zur Beschreibung der Verhältnisse an diskontinuierlichen Schichten ungeeignet. Aus diesem Grund modifizierten YULE und NIELSEN den geometrischen Ansatz von MURRAY und DAVIES. Sie betrachteten dazu zwei Grenzfälle: Eine isotrop und verlustfrei streuende Schicht - z. B. Opalglas - und einen diffus streuenden Oberflächenreflektor - z. B. mattiertes Aluminium.

Diese Schichten stellen bezüglich ihres Lichtstreuverhaltens Extreme dar. Mattiertes Aluminium ist lichtundurchlässig; auftreffendes Licht kann nicht in die Schicht eindringen und wird vollständig an der Oberfläche diffus reflektiert <sup>/4.1/</sup>. In diesem Falle ideal reflektierender Oberfläche gilt die MURRAY-DAVIES-Gleichung exakt.

$$D_R = -\log [1 - \varphi (1 - 10^{-D_F})]$$

Der zweite Extremfall, z. B. rückseitig verspiegeltes Opalglas, steht für eine Schicht, in die Licht zwar eindringt, bei dem das Licht aber vollständig isotrop und verlustfrei aus der Schicht heraus zurückgestreut wird. Oberflächeneffekte und Absorption des Lichtes innerhalb des Opalglases werden von YULE und NIELSEN nicht betrachtet. Das Licht wird also nur durch die gerasterte Farbschicht moduliert. Durch die Rasterdruckschicht wird ein Anteil  $(1 - \varphi) + \varphi \tau_F$  durchgelassen und in der Substratschicht diffus und verlustfrei gestreut;  $\tau_F$  ist dabei der Transmissionsgrad der Farbschicht. Das Streulicht wird schließlich beim Verlassen der Schicht noch einmal um den Anteil  $(1 - \varphi) + \varphi \tau_F$  vermindert.

---

<sup>/4.1/</sup> Reflexion des Lichtes - als elektromagnetische Welle - an einer Oberfläche bedeutet physikalisch eine Wechselwirkung mit der Oberfläche. Das wiederum setzt ein „Eindringen“ des Lichtes in die Schicht voraus. Die Eindringtiefe liegt in der Größenordnung der Wellenlänge. Dieser Wert ist gegenüber der Schichtdicke vernachlässigbar und im Vergleich zur mittleren Streulänge bei Vielfachstrevorgängen, die letztlich zum Lichtfang-Effekt führen, um Größenordnungen kleiner.

---

Der rückgestreute Anteil beträgt also  $[(1 - \varphi) + \varphi \tau_F]^2$  bzw.  $[1 - \varphi(1 - \tau_F)]^2$ .  
Für den Reflexionsgrad eines Rasterdruckes gilt daher

$$\rho_R = [1 - \varphi(1 - \tau_F)]^2.$$

Bei vollflächiger Farbbelegung ist  $\varphi = 1$  und es ergibt sich  $\rho_R = \rho_F = \tau_F^2$ .

Für die optische Dichte eines Rasterdruckes auf einer isotrop und verlustfrei streuenden Schicht gilt demzufolge

$$D_R = -2 \log [1 - \varphi(1 - 10^{-\frac{D_F}{2}})] \quad (4.7)$$

Die beiden angeführten Extremfälle stellen sicherlich die Grenzwerte für das Lichtstreuverhalten realer Bedruckstoffe dar. Die Ähnlichkeit der Formeln legt eine verallgemeinerte Form nahe, wie sie von YULE und NIELSEN vorgeschlagen wurde:

$$D_R = -n \log [1 - \varphi(1 - 10^{-\frac{D_F}{n}})] \quad (4.8)$$

Der Flächendeckungsgrad folgt daraus zu

$$\varphi = \frac{1 - 10^{-\frac{D_R}{n}}}{1 - 10^{-\frac{D_F}{n}}} \quad (4.9)$$

Die YULE-NIELSEN Gleichung ist eine parametrisierte Form der MURRAY-DAVIES-Gleichung. Sie ist rein empirischer Natur und nicht durch ein physikalisches Modell erklärbar, sondern lediglich durch die oben angeführte Extremfallbetrachtung plausibel. Der Parameter  $n$  wird zwar durch das Lichtstreuverhalten des Bedruckstoffes beeinflusst, er stellt aber keine absolute Materialkonstante dar, die den Lichtfang-Effekt für einen bestimmten Bedruckstoff eindeutig charakterisiert. Stark abhängig ist der Faktor  $n$  von der Rasterfrequenz und der Rasterpunktgröße. Diese Abhängigkeit erklärt sich, wie schon erwähnt, in der unterschiedlichen freien Kantenlänge bei unterschiedlicher Rasterpunktgröße.

Ein Wert  $n \approx 1$  bedeutet, daß die mittlere Streulänge <sup>/4.2/</sup> des Lichtes in der Schicht klein ist, verglichen mit der Größe der gedruckten Farbflächelemente. Durch die starke Abhängigkeit des YULE-NIELSEN-Parameters  $n$  von der Rasterfrequenz ergeben sich bei stark streuenden Bedruckstoffen und feiner Rasterteilung Werte  $n > 2$ , die vom Ansatz her eigentlich nicht auftreten dürfen und damit der ursprünglichen Interpretation widersprechen.

M. PEARSON beschreibt in seiner Veröffentlichung von 1980 die Faktoren, die den Parameter  $n$  der YULE-NIELSEN-Gleichung entscheidend beeinflussen /PEARSON, 1980/. Er schreibt dort:

*"of the factors contributing to a correct value of  $n$  for a given condition, dot area level is the least significant contributor. Screen frequency is the most significant. This implies that the value of  $n$  changes faster with the changes in frequency than with any other parameter."*

Damit charakterisiert er sehr prägnant die Unzulänglichkeit der einparametrischen Theorie von YULE und NIELSEN.

#### 4.4 CLAPPER-YULE-Beschreibung

Einen wichtigen Schritt bei der Beschreibung der Mechanismen der Lichtreflexion, -streuung und -absorption im Bedruckstoff und der Druckfarbe bei Rasterdrucken machten CLAPPER und YULE im Jahre 1953 /CLAPPER, 1953/.

---

<sup>/4.2/</sup> Weg zwischen Eintritt des Lichtes in den Bedruckstoff und Wiederaustritt. Die Streulänge kann in Papier eine Strecke von 100µm deutlich überschreiten.

/PEARSON, 1980/

M. Pearson,  
N-Value for General Conditions,  
TAGA Proc. (1980), 415 - 425

/CLAPPER, 1953/

F. R. Clapper, J. A. C. Yule,  
The Effect of Multiple Internal Reflections on the Densities of Halftone Prints on Paper, J. opt. Soc. Am. 23 (1953), Nr. 7, 600 - 603

---

CLAPPER und YULE beschrieben die verschiedenen physikalischen Vorgänge erstmals differenziert und charakterisieren dabei einzeln die optischen Vorgänge mit separaten Koeffizienten. Sie konnten erstmals zeigen, daß die optische Dichte eines Rasterdruckes mit hoher Rasterfrequenz auf ungestrichenem Papier aufgrund innerer Mehrfachstreuungsvorgänge um den Faktor drei vergrößert sein kann gegenüber dem nach MURRAY und DAVIES berechneten rein geometrischen Wert - verfahrensbedingte Punktvergrößerung wurde dabei nicht betrachtet.

#### 4.5 Streufunktionen

RUCKDESCHEL und HAUSER untersuchten den Effekt der Lichtstreuung im Bedruckstoff - hier: Papier - zum ersten Mal aus physikalischer Sicht /RUCKDESCHEL, 1978/. Sie griffen die Annahme von YULE und NIELSEN auf, daß die Abweichung zwischen densitometrisch gemessener und geometrischer Flächendeckung durch Lichtstreuungsvorgänge zwischen Lichteintritt und Lichtaustritt innerhalb der Schicht des Bedruckstoffes hervorgerufen wird. Licht, das an einer Stelle  $\mathbf{x}_0$  in den Bedruckstoff eindringt, tritt nicht zwangsläufig an der gleichen Stelle wieder aus, sondern an einer  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  entfernten Stelle  $\mathbf{x}$ . Dieses Verhalten läßt sich durch die „Linienstreuungsfunktion“  $\psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  beschreiben.

RUCKDESCHEL und HAUSER haben rein empirisch gefunden, daß die Punktstreuungsfunktion für isotrop streuende ungestrichene Papiere einer Gauß-Verteilung der Form

$$\psi_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} \exp \left\{ - \left[ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\sigma} \right]^2 \right\} \quad (4.10)$$

entspricht.

---

/RUCKDESCHEL, 1978/

F. R. Ruckdeschel, O. G. Hauser,  
*Yule-Nielsen effect in printing: a physical analysis,*  
*Applied Optics* 17 (1978), Nr. 21

---

Für andere nicht näher beschriebene spezielle Papiere - mit größerem Streuvermögen - beschreibt die Streufunktion

$$\psi_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\frac{\sigma}{\pi}}{[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0]^2 + \sigma^2} \quad (4.11)$$

das experimentell ermittelte Streuverhalten besser. Die Größe  $\sigma$  ist dabei jeweils eine die Lichtdiffusion kennzeichnende Konstante, die Standardabweichung; in ihr ist eine spezifische mittlere Streulänge des Lichtes in der betrachteten Schicht zu sehen.

Bei Kenntnis der Linienstreufunktion  $\psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  und der Bestrahlungsstärke  $E_e(\mathbf{x})$ , läßt sich die spezifische Ausstrahlung  $M_e(\mathbf{x})$  aus dem nachfolgenden Faltungsintegral berechnen:

$$M_e(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_e(\mathbf{x}_0) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (4.12)$$

RUCKDESCHEL und HAUSER konnten damit das Streuverhalten von einigen Bedruckstoffen durch empirisch angepaßte Streufunktionen beschreiben. Eine allgemeingültige Darstellung der Streuvorgänge anhand eines physikalischen Streumodells gaben sie jedoch damit nicht.

FISCHER, RODRIGUEZ-GILES, und SCHEUTER griffen bei der Beschreibung von Lichtstreuprozessen an gerasterten Druckmustern auf Erfahrungen aus der wissenschaftlichen Photographie zurück. In diesem Bereich sind „Lichtdiffusionseffekte“ eingehend von FRIESER u. a. untersucht worden /FISCHER, 1982; FRIESER, 1975/.

---

/FISCHER, 1982/

G. Fischer, J. Rodriguez-Giles, K. R. Scheuter,  
*Ein physikalisches Modell für die Beschreibung von Lichtstreuprozessen*  
 Die Farbe 30 (1982); Nr. 1/6, 199 - 220

---

Zur Beschreibung der Streulichtverteilung in photographischen Schichten haben sich einige Näherungsfunktionen bewährt, die denen von RUCK-DESCHER und HAUSER ähnlich sind. In der Veröffentlichung von FISCHER et al. zur Charakterisierung der Lichtstreuung an Linienrasterdrucken wurde die von FRIESER abgeleitete und von RITZ für Rasterdrucke vorgeschlagene „Linienverwaschungsfunktion“ benutzt /RITZ, 1982/:

$$\psi_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-2 \left[ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\sigma} \right]^2\right\} \quad (4.13)$$

FISCHER et al. verwenden bei der Beschreibung der Lichtstreueffekte an Druckmustern Ergebnisse aus dem Bereich photographischer Schichten. Die Streulichtverteilung im Bedruckstoff Papier unterscheidet sich aber ganz wesentlich von den Schichten photographischer Emulsionen. Zur Beschreibung der Lichtstreuung in Bedruckstoffen werden darüber hinaus Streufunktionen auch an anderer Stelle erwähnt: /OITTINEN, 1981; SHAW, 1974/.

In Abb. 4.2 sind die unterschiedlichen Ansätze der Punktstreufunktion in einem Diagramm gegenübergestellt. Zur vergleichenden Darstellung wurde auf der Ordinate  $\psi \sigma$  (dimensionslos) aufgetragen und die Abszisse durch Verwendung der bezogenen Größe

$$\xi = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\sigma} \quad (4.14)$$

dimensionslos gemacht.

---

/RITZ, 1982/

A. Ritz,  
*Mikrofeine Strukturen im Offsetdruck,*  
Papier und Kunststoff-Verarb. (1982), Nr. 4

/OITTINEN, 1981/

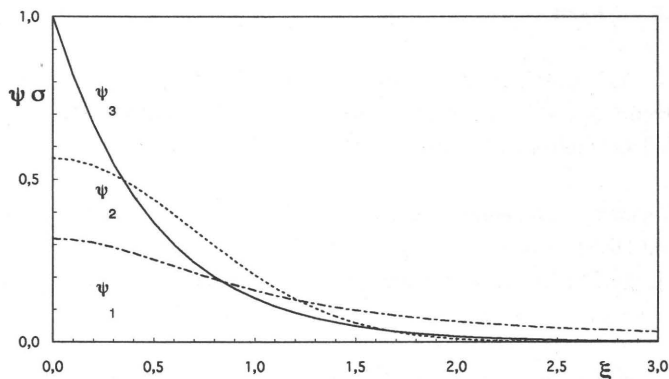
P. Oittinen,  
*Limits of microscopic print quality, Advances in Printing Science and Technology,*  
16th Int. IARIGAI Conference, Miami (1981), London: Pentech Press

/SHAW, 1974/

R. Shaw, F. C. Dainty,  
*Image Science,*  
London: Academic Press (1974)

---





**Abb. 4.2:** Punkstreuungsfunktionen zur Beschreibung der Lichtstreuung in Papier:

$$\psi_1 \sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \quad (\text{nach RUCKDESCHEL})$$

$$\psi_2 \sigma = \frac{1}{\pi (\xi^2 + 1)} \quad (\text{nach RUCKDESCHEL})$$

$$\psi_3 \sigma = e^{-2\xi} \quad (\text{nach FISCHER})$$

All diesen Beschreibungen zur Lichtstreuung in streuenden Schichten ist gemein, daß sie das Streuverhalten im Ergebnis zwar beschreiben, aber nur durch einen angepaßten funktionalen Zusammenhang, der nicht in einem physikalischen Ansatz begründet ist.

Die weitgehende Anwendbarkeit symmetrischer Streufunktionen auf den Bedruckstoff Papier, die durch die vorstehend zitierten Arbeiten nachgewiesen werden konnte, zeigt, daß die Annahme isotroper Streuung innerhalb der Schicht des Bedruckstoffes, insbesondere bei den meisten Papieren, gerechtfertigt ist.

#### 4.6 Fazit

Die Aussagefähigkeit der dargestellten Modelle zur Beschreibung der Lichtstreuung an Rasterdrucken wird durch die Eigenschaften des jeweiligen Bedruckstoffes ganz entscheidend beeinflußt.

Weder die rein geometrische Beschreibungen der Lichtstreuung von MURRAY und DAVIES noch die pragmatischen Ansätze von YULE und NIELSEN bzw. CLAPPER und YULE können die Lichtstreuvorgänge im Bedruckstoff hinreichend gut beschreiben.

Es ist bemerkenswert, daß bis heute in der praktischen Anwendung die rein geometrische Darstellung der Lichtstreuung von MURRAY und DAVIES ohne Berücksichtigung des Streuverhaltens des Bedruckstoffes Anwendung findet. Dies ist sicherlich auf die Einfachheit und Nachvollziehbarkeit der Gleichungen zurückzuführen. Außerdem stehen dem Praktiker i. d. R. keine Informationen über die Streueigenschaften des Bedruckstoffes zur Verfügung.

Anders ist dies in den Bereichen der Papiererzeugung. Hier besteht die Notwendigkeit, die optischen Eigenschaften des Bedruckstoffes Papier möglichst genau zu kennen. Die Wirkung eines Papiers wird eben gerade durch die Reflektion des Lichtes bestimmt, und hierbei spielt die Streuung im Papier selbst eine entscheidende Rolle.

---

## 5 Lichtstreuung an trüben Medien

Jeder Stoff in einem Ausbreitungsraum elektromagnetischer Wellen wird als Medium bezeichnet. Zu unterscheiden sind dabei optisch klare und optisch trübe Medien. Bedruckstoffe sind aufgrund ihrer Eigenschaft, Licht im allgemeinen diffus zurückzustreuen, im optischen Sinne trübe Medien <sup>/5.1/</sup>. Eine Schicht wird als trübes Medium bezeichnet, wenn eintretendes Licht in alle Raumrichtungen gestreut wird und rein strahlenoptische Verhältnisse der Lichtausbreitung dadurch nicht mehr gegeben sind. Bei optisch klaren Medien findet die Lichtausbreitung geradlinig statt. Streueffekte treten innerhalb des Mediums nicht auf; Absorption ist hingegen möglich.

Anders als bei optisch klaren Medien - hier genügt eine konstante Größe, der Extinktionskoeffizient, zur Beschreibung der Vorgänge - spielt bei optisch trüben Medien die Streuung des Lichtes an den die Trübung verursachenden „Streuzentren“ die entscheidende Rolle neben dem Vermögen, Licht zu absorbieren. Zur Beschreibung eines optisch trüben Mediums sind zwei charakteristische optische Materialkonstanten notwendig: Ein die Absorption beschreibender Koeffizient und ein Koeffizient, der das Streuverhalten charakterisiert.

Das Verhalten lichtstreuender Medien wird durch unterschiedliche Modelle beschrieben. Auf dem Gebiet der drucktechnisch relevanten trüben Medien - das sind die Druckfarbe und der Bedruckstoff - kommen insbesondere die Theorie von KUBELKA und MUNK und ein Streumodell, basierend auf der Arbeit von STOKES, zur Anwendung /KUBELKA, 1931; STOKES, 1860/.

---

<sup>/5.1/</sup> Rein spiegelnde und vollkommen transparente Bedruckstoffe sind Ausnahmen und werden hier nicht betrachtet. Der Lichtfang-Effekt tritt dort ohnehin nicht auf.

/KUBELKA, 1931/

P. Kubelka, F. Munk,  
*Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche*,  
Zeits. f. techn. Physik 12 (1931), 593 - 601

/STOKES, 1860/

G. G. Stokes,  
Proc. Roy. Soc. London 94 (1918), 222

---

Diese beiden grundlegenden Arbeiten wurden mehrfach modifiziert, und es entstanden daraus weitgehend unabhängig voneinander verschiedene Streumodelle /CHANNON, 1918; BRUCE, 1926; GUREVIC, 1930; SMITH, 1931; AMY, 1937/.

Alle diese Arbeiten zeigen aufgrund des gemeinsamen Ursprungs verwandte Ergebnisse. INGLE beschreibt die wechselseitigen Zusammenhänge einiger Modelle anhand mathematischer Gegenüberstellungen. Zu weitergehenden Studien sei diesbezüglich auf die Originalarbeit von INGLE verwiesen /INGLE, 1942/.

Die KUBELKA-MUNK-Theorie ist unter den verschiedenen Arbeiten, die sich mit der Lichtstreuung an trüben Medien befassen, sehr allgemein formuliert und hat sich dadurch auch in vielen Anwendungsbereichen durchgesetzt. Die wichtigsten Annahmen und Aussagen dieser Streutheorie sollen an dieser Stelle zunächst kurz vorgestellt werden, um sie anschließend weiterführend zu diskutieren.

---

/CHANNON, 1918/

H. J. Channon, F. F. Renwick, B. V. Storr,  
Proc. Roy. Soc. London 11 (1860 - 62), 545

/BRUCE, 1926/

H. D. Bruce,  
Tech. Pap. 306, Nat. Bur. Stand. (1926)

/GUREVIC, 1930/

M. Gurevic,  
*Über eine rationelle Klassifikation der lichtstreuenden Medien,*  
Phys. Z. 31 (1930), 753

/SMITH, 1931/

T. Smith,  
Trans. Opt. Soc. London 33 (1931), 150

/AMY, 1937/

L. Amy,  
Rev. d'optique 16 (1937), 81

/INGLE, 1942/

G. W. Ingle,  
A. S. T. M. Bull. 32 (1942)

---

Bei der Bewertung der optischen Eigenschaften von Papieren können die Ergebnisse der KUBELKA-MUNK-Theorie nur unter Einschränkungen angewandt werden /SCHMIDT, 1959/. Die Stoffparameter, Streu- und Absorptionskoeffizienten, zeigen sich scheinbar als nicht invariante Materialgrößen. Es wird unter anderem eine Abhängigkeit der optischen Koeffizienten von der Dicke der zu untersuchenden Schicht festgestellt.

Bei der Anwendung der KUBELKA-MUNK-Gleichungen - zur Bewertung der optischen Eigenschaften von Papieren oder allgemein von Bedruckstoffen - sind Verfälschungen der Ergebnisse aufgrund von Meßfehlern von besonderem Interesse, da bereits sehr kleine Abweichungen der Meßgrößen zu sehr großen Abweichungen der interessierenden Bestimmungsgrößen führen. Zur Erklärung dieser Problematik wird im folgenden Kapitel auf die Bewertung der Meßfehler und deren Auswirkungen auf die optischen Koeffizienten gesondert eingegangen.

---

/SCHMIDT, 1959/

G. Schmidt,

*Die Transparenz und die Lichtremission von Papieren.*

*Theorie und Meßverfahren,*

Das Papier 13 (1959), Nr. 7/8, 141

---

## 5.1 KUBELKA-MUNK-Theorie

KUBELKA und MUNK waren nicht die ersten, die sich mathematisch mit der Lichtstreuung an trüben Medien auseinandersetzten. Aber insbesondere im Bereich der drucktechnischen Medien Druckfarbe und Bedruckstoff (Papier) fand die KUBELKA-MUNK-Theorie verbreitete Anwendung.

Die Originalarbeit von KUBELKA und MUNK war gedacht, wie der Titel besagt, als „*Theoretische Behandlung der Optik der Anstriche*“ /KUBELKA, 1931/. Die Ausführungen bezogen sich in erster Linie auf matte, unbunte Anstrichschichten und insbesondere auf weiße und hellgraue Deckanstriche.

Die Anwendung der KUBELKA-MUNK-Theorie auf das optische Verhalten von Papier wurde zunächst von JUDD und STEELE versucht /JUDD, 1934; STEELE, 1935/. Aber erst VAN DEN AKKER konnte der KUBELKA-MUNK-Theorie in der Papierindustrie zum Durchbruch verhelfen, indem er anstatt der Papierdicke die flächenbezogene Masse einsetzte und damit auch die optischen Koeffizienten in entsprechender Dimension - reziproke Dimension der flächenbezogenen Masse - ausdrückte /VAN DEN AKKER, 1949/. VAN DEN AKKER erreichte damit ganz entscheidende Veränderungen, die der KUBELKA-MUNK-Theorie insbesondere in der papiererzeugenden Industrie zur Anerkennung verhelfen. Die Dimension der optischen Koeffizienten, Streu- und Absorptionskoeffizienten, in der KUBELKA-MUNK-Theorie ist damit eine „massenbezogene Fläche“, die als streuende respektive absorbierende Fläche je Masseneinheit interpretiert wird.

---

/JUDD, 1934/

D. B. Judd,  
J. Research Nat. Bur. Stand. 12 (1934), 345 und 13 (1934), 281

/STEELE, 1935/

F. A. Steele,  
*The optical characteristics of paper, I. The mathematical relationships between basis weight, reflectance, contrast ratio and other optical properties,*  
Paper Trade J. 100 (1935), TS 151

/VAN DEN AKKER, 1949/

J. A. Van den Akker,  
*Scattering and absorption of light in paper and other diffusing media,*  
TAPPI 32 (1949), 498

---

Heute werden die Reflexionseigenschaften vielfältiger Materialien wie Farbe, Papier, Textilien, Milchglas oder Keramik durch die KUBELKA-MUNK-Ableitungen beschrieben und durch deren Ergebnisse charakterisierbar.

### 5.1.1 Differentialansatz

Die lichtstreuende Schicht wird von KUBELKA und MUNK als ein homogenes, isotrop streuendes Medium betrachtet, aufgebaut aus infinitesimal dünnen Schichten. Jede dieser unendlich dünnen Teilschichten trägt ihren differentiellen Anteil zur Streuung und Absorption des auffallenden Lichtes bei. Die lichtstreuende Schicht ist dabei auf einem Substrat mit dem Reflexionsgrad  $\rho_s$  dargestellt. Die Schicht und das Substrat werden in  $x$ -Richtung unendlich weit ausgedehnt angenommen. In Abb. 5.1 sind die Größen skizziert, die im KUBELKA-MUNK-Modell betrachtet werden. Das sind die Bestrahlungsstärke  $E$  und die spezifische Ausstrahlung  $M$  an den Stellen  $z$  und  $z+dz$ . Die lichtstreuende Schicht wird durch einen Streukoeffizient  $s$  - bei KUBELKA-MUNK wird der Begriff Remissionkonstante verwendet und seitlich gestreutes Licht wird dort der Absorption zugerechnet - und durch einen Absorptionskoeffizient  $a$  charakterisiert. Die Randbedingungen sind durch den Reflexionsfaktor  $\rho_s$  des Substrates und die Bestrahlungsstärke  $E(0)=E_0$  an der Schichtoberfläche gegeben.

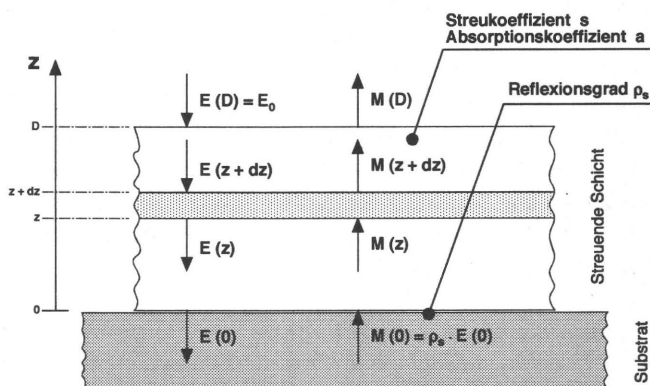


Abb. 5.1: Lichtstreuende Schicht auf Substrat (Reflexionsfaktor  $\rho_s$ )

Die Energiebilanz ergibt für die Bestrahlungsstärke  $E_e$  und für die spezifische Ausstrahlung  $M_e$  <sup>/5.2/</sup> an einer differentiell dünnen Schicht in den beiden Raumrichtungen  $z$  und  $-z$  ein Gleichungssystem. Durch TAYLOR-Entwicklung der Differenzglieder folgt daraus im Grenzübergang zu infinitesimalen Größen ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, der KUBELKA-MUNK-Ansatz :

$$\frac{\partial E}{\partial z} - (s + a) \cdot E = -s \cdot M \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} + (s + a) \cdot M = +s \cdot E \quad (5.2)$$

In der Physik wird zur Beschreibung von Streuvorgängen der „Wirkungsquerschnitt“ verwendet. Er gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß beim Einfall von Teilchen auf Materie eine bestimmte Reaktion stattfindet, z. B. Streuung. Die oben angeführten Koeffizienten entsprechen dem Produkt aus dem dazugehörigen Wirkungsquerschnitt - er hat die Dimension einer Fläche - und der Streuzentrendichte - angegeben als Anzahl pro Volumen. Dies ist ähnlich der Notation von VAN DEN AKKER, bezieht man die Streuzentrendichte anstatt auf das Volumen auf eine Masseneinheit.

### 5.1.2 Reflexionsgrad als Lösung

Ausgehend von den beiden Differentialgleichungen (5.1) und (5.2), deren Lösungen zum einen die Bestrahlungsstärke  $E(z)$  und zum anderen die spezifische Ausstrahlung  $M(z)$  in Abhängigkeit von der Ortskoordinate  $z$  in Dickenrichtung beschreibt, entwickelten KUBELKA und MUNK zunächst nur eine allgemeine Gleichung für die „Helligkeit“, den Reflexionsgrad, einer endlich dicken Schicht, die sich auf einer Unterlage (Substrat: „s“) mit einem Reflexionsgrad  $\rho_s$  befindet.

---

/5.2/ Im folgenden wird der Index „e“ (energiebezogen) weggelassen, da nur physikalische, energiebezogene Größen verwendet werden und die Gefahr einer Verwechslung mit lichttechnischen Größen unwahrscheinlich ist:  $E = E_e$ ;  $M = M_e$



Die Differentialgleichungen sind entkoppelbar und somit einfach zu lösen, indem das Verhältnis aus der spezifischen Ausstrahlung  $M(D)$  und der Bestrahlungsstärke  $E(D)$  definiert wird. Dies ist der Reflexionsgrad  $\rho$  der Schicht an der Schichtoberfläche ( $z = D$ ).

Die *exponentielle* Lösung für den Reflexionsgrad  $\rho$  einer lichtstreuenden Schicht als Funktion der Schichtdicke  $D$  bei gegebenem Reflexionsgrad  $\rho_s$  der Unterlage lautet nach KUBELKA und MUNK:

$$\rho = \frac{M(D)}{E(D)} = \frac{\frac{1}{\rho_\infty} (\rho_s - \rho_\infty) - \rho_\infty (\rho_s - \frac{1}{\rho_\infty}) e^{sD (\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty)}}{(\rho_s - \rho_\infty) - (\rho_s - \frac{1}{\rho_\infty}) e^{sD (\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty)}} \quad (5.3)$$

Die charakteristischen Größen des streuenden Mediums sind der Streukoeffizient  $s$  und der *fiktive* Reflexionsgrad der unendlich dicken Schicht  $\rho_\infty$ . Der Reflexionsgrad  $\rho_\infty$  ist über die „KUBELKA-MUNK-Funktion“ mit den beiden das optische Verhalten beschreibenden Koeffizienten für das Streu- ( $s$ ) und Absorptionsvermögen ( $a$ ) verknüpft:

$$\frac{a}{s} = \frac{(1 - \rho_\infty)^2}{2 \rho_\infty} \quad \text{„KUBELKA-MUNK-Funktion“} \quad (5.4)$$

Die „KUBELKA-MUNK-Funktion“ hat überall dort Anwendung gefunden, wo man, ausgehend von Reflexionsmessungen, Aussagen über das Verhältnis zwischen Absorption und Streuung einer Schicht machen möchte /CASEY, 1952; JUDD, 1969/

---

/JUDD, 1969/

D. B. Judd, G. Wyszecski,  
*Color in Business, Science and Industry*,  
 J. Wiley + Sons, Inc., New York (1969)

/CASEY, 1952/

J. P. Casey,  
*Pulp and Paper - Vol. II*,  
 Interscience Publishers, New York (1952)

---

### 5.1.3 Koeffizientenbestimmung

#### 5.1.3.1 Klassische Methode

Das klassische Verfahren zur Bestimmung der charakteristischen optischen Stoffkenngrößen - Streukoeffizient  $s$  und Absorptionskoeffizient  $a$  - besteht darin, daß zunächst der Reflexionsgrad  $\rho_{\infty}$  der unendlich dicken Schicht „direkt“ gemessen wird.

Die Bestimmung der Koeffizienten  $s$  und  $a$  erfolgt mit Hilfe von  $\rho_{\infty}$  aus den Gln. (5.3) und (5.4) und mittels einer weiteren Reflexionsmessung an einer einzelnen Schicht bekannter Dicke  $D$  auf einem Substrat mit bekanntem Reflexionsgrad  $\rho_s$ .

Bei dieser Vorgehensweise werden - im Hinblick auf den zu betrachtenden Bedruckstoff Papier - zwei unterschiedlich dicke Papierschichten benötigt: Eine „hinreichend dicke“ Papierschicht, so daß sie im Bereich der Meßgenauigkeit bei der Bestimmung des Reflexionsgrades als „unendlich dicke“ Schicht betrachtet werden kann, und eine Papierschicht mit einer bestimmten Dicke  $D$  auf einem Substrat mit Reflexionsgrad  $\rho_s$ .

Die direkte Bestimmung von  $\rho_{\infty}$  ist i. a. nicht möglich, da üblicherweise keine unendlich dicke Schicht eines zu untersuchenden Mediums zur Verfügung steht - insbesondere nicht bei praxisüblichen Bedruckstoffen. Nur bei extrem stark streuenden Materialien ist eine ausreichende Annäherung an  $\rho_{\infty}$  bei großen Schichtdicken ( $D > 100\mu\text{m}$ ) gegeben und eine quasi direkte Messung möglich.

#### 5.1.3.2 Stapel-Methode

Die Methode, mehrere Einzelschichten zu stapeln, um eine hinreichend dicke Schicht zu erhalten, ist fehlerbehaftet, da Oberflächeneffekte, auch wenn sie an der einzelnen Schicht meist vernachlässigbar sind, im Stapel aufgrund der Mehrfachstreuung das Meßergebnis von  $\rho_{\infty}$  deutlich beeinflussen.

---

### 5.1.3.3 Zwei-Substrat-Methode

Die Bestimmung der Koeffizienten  $s$  und  $a$  ist auch aus zwei Reflexionsmessungen an einer einzelnen Schicht der Dicke  $D$  auf zwei unterschiedlichen Substraten mit verschiedenen Reflexionsgraden  $\rho_{s1}$  und  $\rho_{s2}$  möglich. Vereinfacht wird die Bestimmung der Koeffizienten bei „ideal“ schwarzer Unterlage, dann gilt  $\rho_{s1} = 0$ , und bei „ideal“ weißer Unterlage, dann ist  $\rho_{s2} = 1$ . Da aber die genannten idealen Unterlagen nur näherungsweise zu realisieren sind, bleibt auch diese Methode ungenau.

### 5.1.3.4 Fazit

Die Fehler bei der Messung von  $\rho_{\infty}$  wirken sich über die „KUBELKA-MUNK-Funktion“ unter besonderen Bedingungen stark auf die Genauigkeit bei der Bestimmung des Streu- und Absorptionskoeffizienten aus, da, ausgehend von  $\rho_{\infty}$ , das Verhältnis von  $a$  zu  $s$  nach der „KUBELKA-MUNK-Funktion“ (Gl. 5.4) berechnet wird.

Die klassische Methode nach Kap. 5.1.3.1 zur Bestimmung des Streu- und Absorptionskoeffizienten hat sich als genaueste Methode bewährt und wird daher im folgenden Kapitel Gegenstand einer Fehlerbetrachtung sein /VÖLZ, 1981/.

Der Vollständigkeit halber sei hier auch noch auf die Bestimmungsmethode nach DIN 54 500 hingewiesen, bei der zunächst der Reflexionsgrad der streuenden Schicht auf einer „schwarzen“ Unterlage ( $\rho_s = 0$ ) gemessen wird und dann mit Hilfe von  $\rho_{\infty}$   $s$  bzw.  $a$  berechnet wird /DIN 54 500/.

---

/VÖLZ, 1981/

H. G. Völz,  
Die Farbe 29 (1981)

/DIN 54 500/

DIN 54 500  
Prüfung von Papier; Bestimmung der dichtebezogenen Lichtstreu- und Lichtabsorptionskoeffizienten von Faserstoffen und Papieren

---

#### 5.1.4 Fehlerrechnung

Messungen physikalischer Größen sind grundsätzlich fehlerbehaftet. Ermittelte Meßwerte weichen daher immer vom wahren Wert mehr oder weniger ab. Je nach Ursache der Abweichung unterscheidet man systematische Fehler, dazu gehören die oben erwähnten und in der Vorgehensweise begründeten Fehler bei der Bestimmung von  $\rho_\infty$ , und zufällige Fehler mit entsprechend statistischem Charakter.

Zur Abschätzung der Genauigkeit eines Meßergebnisses ist der „Maximalfehler des Funktionswertes“ aus der Funktionsvorschrift zu berechnen.

Der Funktionsverlauf einer Funktion, die zur Bestimmung einer Größe aus Meßwerten dient, legt die notwendige Meßgenauigkeit fest.

Für den Maximalfehler eines Funktionswertes  $\Delta F$  der Funktion  $F = F(x, y)$  gilt:

$$\Delta F = \pm \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y \right| \right\} \quad (5.5)$$

Die absoluten Fehler der Meßgrößen  $x$  und  $y$  seien  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$ . Der Maximalfehler  $\Delta F$  des Funktionswertes  $F$  setzt sich zusammen aus der Summe der Beträge des jeweiligen Produktes aus Meßfehler ( $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$ ) und partieller Ableitung der Funktion nach der entsprechenden Meßgröße ( $\frac{\partial F}{\partial x}$  bzw.  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ).

Die „KUBELKA-MUNK-Funktion“, Gl. (5.4), sei nachstehend abgekürzt mit

$$\kappa = \frac{a}{s} \quad (5.6)$$

Die Funktionsvorschrift zur Bestimmung von  $\kappa$  aus der Meßgröße  $\rho_\infty$  lautet damit

$$\kappa = \frac{(1 - \rho_\infty)^2}{2 \rho_\infty} \quad (5.7)$$

Der Maximalfehler  $\Delta \kappa$  ergibt sich daraus durch Ableitung von  $\kappa$  nach  $\rho_\infty$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \rho_{\infty}} = -\frac{1 - \rho_{\infty}^2}{2\rho_{\infty}^2} = -\frac{(1 - \rho_{\infty})(1 + \rho_{\infty})}{2\rho_{\infty}^2} \quad (5.8)$$

und somit gilt

$$\Delta \kappa = \pm \left\{ \left| \frac{\partial \kappa}{\partial \rho_{\infty}} \Delta \rho_{\infty} \right| \right\} = \pm \left\{ \frac{(1 - \rho_{\infty})(1 + \rho_{\infty})}{2\rho_{\infty}^2} \Delta \rho_{\infty} \right\} \quad (5.9)$$

Der *relative* Maximalfehler von  $\kappa$  besteht aus einem multiplikativen Faktor  $\nu$  und dem relativen Fehler des Meßwertes  $\rho_{\infty}$ :

$$\frac{\Delta \kappa}{\kappa} = \pm \nu \frac{\Delta \rho_{\infty}}{\rho_{\infty}} \quad (5.10)$$

Der Faktor  $\nu$  ist eine Funktion des Meßwertes  $\rho_{\infty}$  und wirkt sich, abhängig von der Größe des Meßwertes, auf die Fehlergrenzen des Funktionswertes  $\kappa$  aus.

$$\nu = \frac{(1 + \rho_{\infty})}{(1 - \rho_{\infty})} \quad (5.11)$$

Die Abhängigkeit des Faktors  $\nu$  von der Meßgröße  $\rho_{\infty}$  und damit das Verhalten des Maximalfehlers  $\Delta \kappa$  zeigt in Abb. 5.2 einen überproportional ansteigenden Verlauf bei zunehmenden Werten  $\rho_{\infty}$ . Der Meßfehler von  $\rho_{\infty}$  bewirkt einen  $\nu$ -fach größeren Fehler des Funktionswertes  $\kappa$  der „KUBELKA-MUNK-Funktion“. Im Bereich einsatzüblicher Bedruckstoffe ( $\rho_{\infty} = 0,6 - 0,98$ ) variiert  $\Delta \kappa / \kappa$  zwischen dem 4- bis 100-fachen Wert des Fehlers  $\Delta \rho_{\infty} / \rho_{\infty}$ . Bei einem realistischen Fehler von  $\Delta \rho_{\infty} / \rho_{\infty} = \pm 1\%$  kann der relative Maximalfehler der Größe  $\kappa$  bis zu  $\pm 50\%$  betragen. Eine sinnvolle Bestimmung der Stoffkenngrößen  $s$  und  $a$  ist dann nicht mehr möglich <sup>/5.4/</sup>.

---

/5.4/ Bei der Angabe von Meßwerten sollte grundsätzlich die Meßwertungenauigkeit - die Fehlergrenzen - angegeben werden!

---

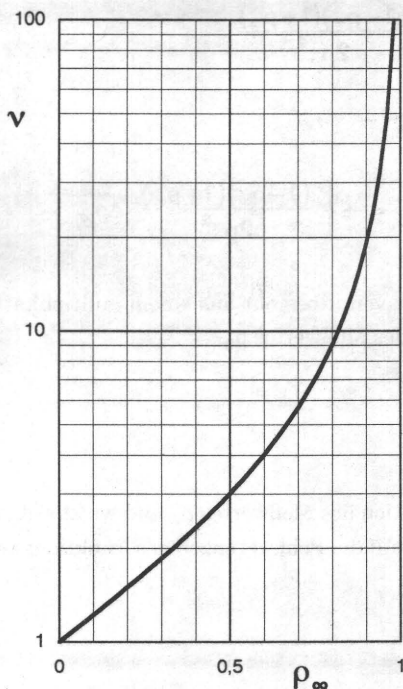


Abb. 5.2: Abhängigkeit des Faktors  $v$  vom Meßwert  $\rho_{\infty}$

Da  $\kappa$  über Gl. 5.6 mit  $a$  und  $s$  verknüpft ist, bedeutet dies für den relativen Maximalfehler des Absorptionskoeffizienten  $a$  nach Gl. 5.5:

$$\frac{\Delta a}{a} = \pm \left\{ \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta \kappa}{\kappa} \right\} \quad (5.11)$$

Das bedeutet, daß selbst bei sehr kleinem Fehler  $\Delta s$  des Streukoeffizienten  $s$  der Fehler bei der Bestimmung des Absorptionskoeffizienten  $a$  maßgeblich durch die Unsicherheit von  $\kappa$  festgelegt ist. Umgekehrt gilt dies natürlich auch bei der Bestimmung von  $s$  aus  $a$ .

## 6 Neue Überlegungen zur KUBELKA-MUNK-Theorie

KUBELKA und MUNK leiten in ihrer Originalarbeit das Verhältnis der beiden Lösungen des Differentialgleichungssystems 5.1 und 5.2 ab, nicht aber die Lösungsfunktionen  $E(z)$  und  $M(z)$  selbst.

Die Lösungen für  $E(z)$  und  $M(z)$  lassen sich auch direkt aus dem Ansatz von KUBELKA und MUNK gewinnen. LUO hat in seiner Arbeit zur „Lichtinduzierten Vergilbung von ligninhaltigen Faserstoffen und Vermeidungsmaßnahmen“ einen direkten Lösungsweg für die Bestrahlungsstärke  $E(z)$  gewählt [LUO, 1993]. Die spezifische Ausstrahlung  $M(z)$  wird dort jedoch nicht abgeleitet.

*Der direkte Lösungsweg wird an dieser Stelle in verkürzter Form dargestellt, um dem Leser den Gesamtüberblick über den Inhalt dieser Arbeit zu bewahren. Die mathematischen Herleitungen und Zwischenschritte sind deshalb zunächst auf ein hinreichendes Maß reduziert. Eine ausführliche Berechnung ist im mathematischen Anhang dieser Arbeit zu finden. Dort kann der detaillierte Lösungsweg mühelos nachvollzogen werden.*

Resultierend aus den expliziten Lösungen für  $E(z)$  und  $M(z)$  wird im folgenden Kapitel außerdem eine neue Methode zur exakten Bestimmung der materialspezifischen Größe  $\rho_\infty$  vorgestellt. Auch hierbei ist wieder das notwendige mathematische Gerüst der Berechnungen dargestellt. Für die detaillierte Herleitung wird auf den Anhang verwiesen.

---

[LUO, 1993/

C. Luo,  
Lichtinduzierte Vergilbung von ligninhaltigen Faserstoffen  
und Vermeidungsmaßnahmen,  
Fortsch.-Ber. VDI Reihe 3 Nr. 316

---

### 6.1 Direkter Lösungsweg

Gleichung 5.1 ist umzuformen und nach der spezifischen Ausstrahlung  $M$  aufzulösen; man erhält Gl. 6.1 :

$$M = -\frac{1}{s} \left[ \frac{\partial E}{\partial z} - (s + a) E \right] \quad (6.1)$$

Gleichung 5.1 wird dann ein weiteres Mal nach  $z$  abgeleitet und die Ableitung in die Gleichungen 5.2 und 6.1 eingesetzt. Daraus ergibt sich eine Differentialgleichung zweiten Grades für die Bestrahlungsstärke  $E(z)$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + [s^2 - (s + a)^2] E = 0 \quad (6.2)$$

Es sind zunächst die Nullstellen  $\lambda_i$  des zur Dgl. 6.2 gehörenden charakteristischen Polynoms zu bestimmen. Mit Hilfe der Randbedingungen

$$E(D) = E_0 \text{ und } M(0) = \rho_s E(0), \quad (6.3)$$

wie sie der Abb. 5.1 zu entnehmen sind, werden dann die expliziten Lösungen mit dem Ansatz

$$E(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z}$$

formuliert.

Die expliziten Lösungen der KUBELKA-MUNK-Funktion für die Bestrahlungsstärke  $E$  und die spezifische Ausstrahlung  $M$ , die sich schließlich aus der Dgl. 6.1 und der Dgl. 6.2 ergeben, lauten:

$$E(z) = E_0 \frac{f(z)}{f(D)} \quad (6.4)$$

und

$$M(z) = E_0 \frac{g(z)}{f(D)} \quad (6.5)$$



mit den Abkürzungen:

$$f(z) = \left[ \frac{1}{\rho_{\infty}} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} + [\rho_s - \rho_{\infty}] e^{-\alpha s z} \quad (6.6)$$

und

$$g(z) = [1 - \rho_s \rho_{\infty}] e^{+\alpha s z} + \left[ \frac{\rho_s}{\rho_{\infty}} - 1 \right] e^{-\alpha s z} \quad (6.7)$$

und mit

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho_{\infty}} - \rho_{\infty} \right] \quad (6.8)$$

und den die streuende Schicht beschreibenden Parametern  $a$  bzw.  $s$ ,  $\rho_{\infty}$  und dem Reflexionsgrad der Unterlage  $\rho_s$ .

Für den Reflexionsgrad  $\rho(D)$  der streuenden Schicht der Dicke  $z = D$  gilt dann

$$\rho(D) = \frac{M(D)}{E(D)} = \frac{g(D)}{f(D)} \quad (6.9)$$

*Der detaillierte Lösungsweg ist im mathematischen Anhang zu finden.*

## 6.2 $\rho_{\infty}$ der Einzelschicht

$\rho_{\infty}$  ist eine materialspezifische Größe, die das Verhältnis zwischen Streuung und Absorption der betrachteten Schicht gemäß der KUBELKA-MUNK-Funktion (Gl. 5.4) beschreibt. Aufgrund der angeführten Fehlerrechnung muß das bisher übliche *klassische* Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung dieser Größe aus einer Reflexionsmessung in Frage gestellt werden. Man kann nicht davon ausgehen, daß eine unendlich dicke Schicht durch einen Stapel von Einzelschichten ersetzt werden kann oder sich optisch entsprechend verhält. Bei der Charakterisierung von Anstrichen und Farbschichten vorgegebener Dicke ist die Stapelmethode in der Regel ohnehin nicht anwendbar.

Unter besonderen meßtechnischen Bedingungen läßt sich  $\rho_{\infty}$  aber dennoch mit Hilfe eines geeigneten Reflexionsmeßverfahrens an einer Einzelschicht direkt messen. Diese meßtechnische Bedingung wird im folgenden Kapitel abgeleitet und aufgrund des Funktionsverlaufs des Reflexionsgrades innerhalb der Schicht „Gleichgewichtsbedingung“ genannt: Die Bestrahlungsstärke und die spezifische Ausstrahlung stehen dann in einem festen Verhältnis zueinander - unabhängig von der Ortskoordinate.

## 6.3 Gleichgewichtsbedingung

Der Reflexionsgrad ist mathematisch auch in Abhängigkeit von der Ortskoordinate  $z$  darstellbar. Innerhalb der Schicht berechnet sich  $\rho(z)$  gemäß

$$\rho(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{g(z)}{f(z)} \quad (6.10)$$

Explizit meßbar ist der Reflexionsgrad der Schicht  $\rho(D)$  und der Reflexionsgrad der Unterlage  $\rho_s = \rho(z=0)$ .

Der Reflexionsgrad  $\rho(z)$  wird unabhängig von  $z$ , wenn gilt:

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = 0 \quad \text{„Gleichgewichtsbedingung“} \quad (6.11)$$

Für die Hilfsfunktionen  $f$  und  $g$  bedeutet dies, daß die folgende Vorschrift erfüllt sein muß <sup>/6.1/</sup>:

$$\frac{g'f - f'g}{f^2} = 0 \quad (6.12)$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Lösungsbedingung

$$g'f - f'g = 0 \quad (6.13)$$

wobei

$$f^2 \neq 0 \quad (6.14)$$

gelten muß. An den Stellen  $f = 0$  hat der Funktionsverlauf  $\rho = \rho(\rho_s)$  Pole; der Betrag des Funktionswertes wird unendlich groß.

Die Gleichgewichtsbedingung ist erfüllt, wenn  $\rho(z) = \text{const.}$  gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Reflexionsgrad der Unterlage  $\rho_s$  identisch ist mit dem Reflexionsgrad  $\rho(D)$ , gemessen auf der Oberfläche der Schicht:

$$\rho_s = \rho(z=0) = \rho(z=D)$$

Das Verhältnis  $\rho(z)$  der spezifischen Ausstrahlung  $M(z)$  zur Bestrahlungsstärke  $E(z)$  entspricht an jeder beliebigen Stelle  $z$  innerhalb der Schicht im Falle der Gleichgewichtsbedingung den Werten am Rand der Schicht; dort nimmt der Reflexionsgrad den Wert des Reflexionsgrades der Unterlage  $\rho_s$  an. Der Parameter, der zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung in der Ausgangsgleichung (6.10) variiert werden kann, ist der Reflexionsgrad der Unterlage  $\rho_s$ .

---

<sup>/6.1/</sup> Die gestrichenen Größen  $g'$  und  $f'$  stellen die Ableitungen der Funktionen  $g$  und  $f$  nach der Dickenkoordinate  $z$  dar.

---

Die Frage, die sich aus der Gleichgewichtsbedingung stellt, lautet: Findet sich für eine zu untersuchende Schicht eine „Unterlage“ mit einem Reflexionsgrad  $\rho_s$  so, daß der Reflexionsgrad der Schicht den Wert  $\rho(D) = \rho_s$  annimmt?

Setzt man die Funktionen  $g$  und  $f$  in die Gleichgewichtsvorschrift 6.12 ein, so ergibt sich die Gleichung 6.15 :

$$(\rho_\infty - \rho_s) \left( \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right) \left( \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty \right) = 0 \quad (6.15)$$

Das Gleichgewicht zwischen dem Reflexionsgrad der Ober- und Unterseite der streuenden Schicht liegt also genau dann vor, wenn der Reflexionsgrad der Unterlage dem Reflexionsgrad der unendlich dicken Schicht  $\rho_\infty$  entspricht bzw. dessen reziproken Wert  $1/\rho_\infty$  oder  $\rho_\infty$  den Wert 1 annimmt - dann sind auch gleichzeitig die beiden Vorbedingungen erfüllt. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\rho_s = \rho_\infty = \rho(D) \quad (\text{hier ist } \rho_s \leq 1) \quad (6.16)$$

oder

$$\rho_s = \frac{1}{\rho_\infty} = \rho(D) \quad (\text{hier ist } \rho_s \geq 1) \quad (6.17)$$

Der Funktionsverlauf  $\rho(z)$  des Reflexionsgrades innerhalb der streuenden Schicht ( $0 \leq z \leq D$ ) ist in Abb. 6.1 und Abb. 6.2 für zwei unterschiedlich stark streuende Medien mit gleichem Absorptionskoeffizienten  $a$  über der relativen Schichtdicke  $\frac{z}{D}$  dargestellt.

Im folgenden Kapitel wird der Einfluß der Streuparameter und der Einfluß der Randbedingungen auf das Reflexionsverhalten der lichtstreuenden Schicht verdeutlicht. Variiert wird u. a. der Reflexionsgrad der Unterlage  $\rho_s$  und die Werte  $a$  und  $s$ . Es wird dabei die Bedeutung der Gleichgewichtsbedingung deutlich.

*Der detaillierte Lösungsweg ist im mathematischen Anhang zu finden.*

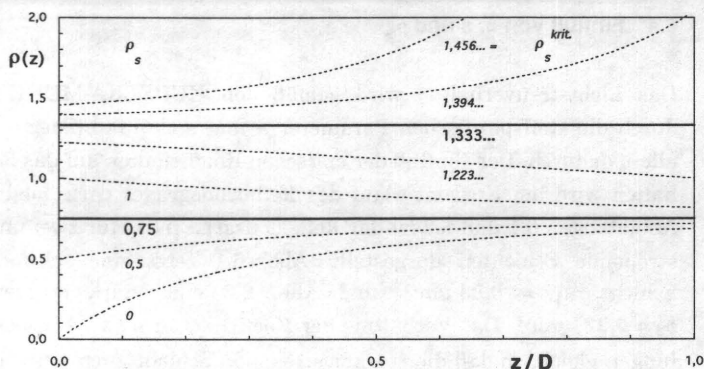
#### 6.4 Einfluß von $a$ , $s$ und $\rho_s$

Das Lichtstreuverhalten wird gemäß den KUBELKA-MUNK-Beziehungen durch die stoffspezifischen Parameter  $a$  und  $s$  charakterisiert - jedoch nicht allein dadurch. Der Einfluß der optischen Koeffizienten auf das Reflexionsverhalten wird am Kurvenverlauf des Reflexionsgrades  $\rho(z)$  deutlich. In den Abbildungen 6.1 und 6.2 ist der Reflexionsgrad  $\rho(z)$  für zwei unterschiedlich streuende Schichten dargestellt. Abb. 6.1 zeigt eine schwach streuende Schicht,  $s_1 = 0,03 \mu\text{m}^{-1}$ , und Abb. 6.2 eine stark streuende Schicht,  $s_2 = 0,225 \mu\text{m}^{-1}$ . Das Verhältnis der Koeffizienten  $a/s$  ist in beiden Darstellungen gleich, so daß die stärker streuende Schicht auch einen entsprechend größeren Absorptionskoeffizienten hat. Beide Medien zeigen damit bei unendlicher Dicke den gleichen Reflexionsgrad  $\rho_\infty$ . Das Reflexionsverhalten im Inneren der streuenden Schicht unterscheidet sich aber voneinander, da die absoluten Größen der Streu- und Absorptionskoeffizienten unterschiedlich sind.

Die Kurvenscharen ergeben sich in der jeweiligen Abbildung aus der Variation der Randbedingung  $\rho_s$ . Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen den Funktionsverlauf des Reflexionsgrades  $\rho(z)$ , bei verschiedenen Reflexionsgraden  $\rho_s$  der Unterlage, dargestellt über der normierten Schichtdicke  $z/D$ .

Der Funktionsverlauf  $\rho(z)$  ist auch für Werte  $\rho_s > 1$  aufgeführt, d. h. bei Lichtverstärkung durch die Unterlage. Eine solche lichtverstärkende Unterlage, deren Reflexionsgrad auch für Werte  $\rho_s > 1$  einstellbar ist, läßt sich durch einen geeigneten Versuchsaufbau mit Photodetektor und einer proportional dem einfallenden Licht regelbaren Lichtquelle, einem Lichtverstärker mit veränderbarem Verstärkungsfaktor realisieren. Ein entsprechender Versuchsaufbau wird in Kapitel 6.5 vorgeschlagen.

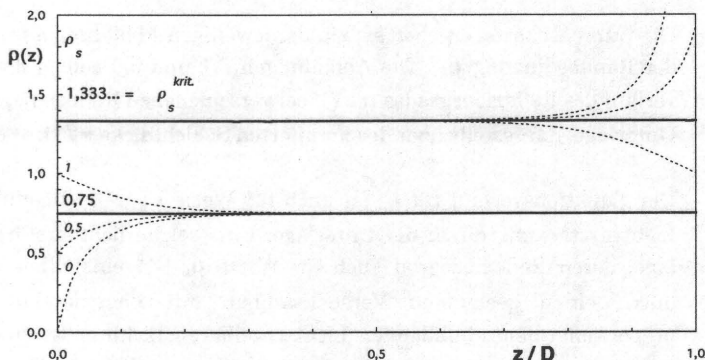
Die Funktionsvorschrift  $\rho(z)$  bedingt, daß es für den Parameter  $\rho_s$  einen theoretischen oberen Grenzwert  $\rho_s^{\text{krit}}$  gibt, der einen unendlich großen Reflexionsgrad  $\rho(D)$  auf der bestrahlten Schichtoberfläche zur Folge hätte. Begrenzt wird der Reflexionsgrad aber durch die maximale Lichtleistung der Lichtquelle der „Unterlage“.



**Abb. 6.1:** Reflexionsgrad  $\rho(z)$  in Abhängigkeit von  $z/D$  für eine schwach streuende Schicht mit den Stoffkenngrößen:

$$\rho_{\infty} = 0,75; s_1 = 0,03 \mu\text{m}^{-1}; a_1 = 0,00125 \mu\text{m}^{-1} (D = 100 \mu\text{m}); \frac{s_1}{a_1} = 24;$$

Variiert wird als Parameter der Reflexionsgrad der Unterlage  $\rho_s$



**Abb. 6.2:** Reflexionsgrad  $\rho(z)$  in Abhängigkeit von  $z/D$  für eine stark streuende Schicht mit den Stoffkenngrößen:

$$\rho_{\infty} = 0,75; s_2 = 0,225 \mu\text{m}^{-1}; a_2 = 0,009375 \mu\text{m}^{-1} (D = 100 \mu\text{m}); \frac{s_2}{a_2} = 24;$$

Variiert wird als Parameter der Reflexionsgrad der Unterlage  $\rho_s$

In den Abb. 6.1 und 6.2 sind jeweils die beiden Gleichgewichtsbedingungen  $\rho(z) = \rho_{\infty}$  und  $\rho(z) = 1/\rho_{\infty}$  (Kurvverlauf: —) als horizontal verlaufende Geraden zu erkennen. Sie stellen in der Kurvenschar Asymptoten dar

und repräsentieren den Funktionsverlauf bei Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung.

Der theoretische Grenzwert  $\rho_s^{\text{krit}}$  ist von den Streuparametern der streuenden Schicht abhängig. Er nimmt mit zunehmendem Streu- und Absorptionskoeffizienten ab und strebt dabei gegen  $1/\rho_\infty$ . Anhand der dargestellten Funktionsverläufe läßt sich das Eindringverhalten des Lichtes in die streuende und absorbierende Schicht erkennen und daraus die Bedeutung des Lichtstreuverhaltens auf den Lichtfangeffekt ableiten.

Streu- und Absorptionskoeffizienten bestimmen den Anteil des Lichtfangeffektes bei bedruckten Schichten, wie Papier. Zur Ermittlung der Koeffizienten  $s$  und  $a$  ist es - wie bereits oben erwähnt - notwendig, den Reflexionsgrad  $\rho_\infty$  der unendlich dicken Schicht zu kennen. Steht eine ausreichend dicke Schicht zur Verfügung - das ist abhängig von den Streuparametern selbst - so läßt sich  $\rho_\infty$  quasi direkt mit einem zu vernachlässigbaren Fehler bestimmen. In der Regel ist dies aber nicht der Fall, und  $\rho_\infty$  ist nur ungenau meßbar. Abweichungen gegenüber dem wahren Wert führen zu deutlichen Fehlern bei der weiteren Bestimmung von  $a$  und  $s$ , wie in Kapitel 5.1.4 ausgeführt.

Im folgenden Abschnitt wird eine Meßmethode vorgeschlagen, die eine direkte Bestimmung von  $\rho_\infty$  an einer streuenden Schicht endlicher Dicke erlaubt. Dabei wird keine Einschränkung hinsichtlich der Schichtdicke oder des Streuverhaltens der zu untersuchenden Schicht gemacht, wie es bei der Standardmethode notwendig ist.

---

### 6.5 $\rho_{\infty}$ der endlich dicken Einzelschicht

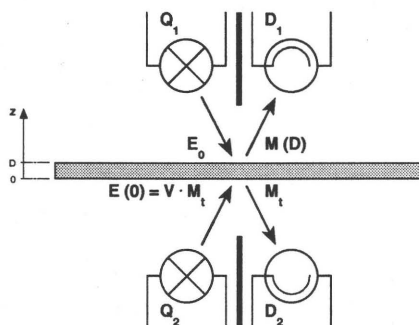
Durch die Wahl einer Unterlage mit *geeignetem* Reflexionskoeffizienten  $\rho_s$ , der eine der beiden Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, ist der materialspezifische Stoffparameter  $\rho_{\infty}$  direkt zu bestimmen.

Die „erste“ Gleichgewichtsbedingung (6.16),  $\rho_s = \rho_{\infty}$ , läßt sich z. B. mit Hilfe einer Musterreihe von Substraten mit unterschiedlichen Reflexionsgraden zwischen 0 und 1 durch Probieren finden. Der Parameter  $\rho_{\infty}$  einer streuenden Schicht kann damit in einer Versuchsreihe, bei der der Reflexionsgrad der zu untersuchenden Schicht auf den verschiedenen reflektierenden Substraten gemessen wird, unmittelbar bestimmt werden. Diese Vorgehensweise erfordert allerdings erheblichen Meßzeitaufwand und bedingt, daß eine Vielzahl von Mustersubstraten, bei feiner Abstufung des Reflexionsgrades, verfügbar ist.

Die „zweite“ Gleichgewichtsbedingung  $\rho_s = 1 / \rho_{\infty}$  (6.17) läßt sich auf diese Weise nicht verifizieren, da im allgemeinen  $\rho_{\infty} < 1$  ist und damit zwangsläufig  $\rho_s > 1$  gelten muß. Das Prinzip der beschriebenen Meßmethode, den Reflexionsgrad  $\rho_s$  so lange zu variieren, bis sich die Gleichgewichtsbedingung einstellt, läßt sich durch den nachfolgend skizzierten Versuchsaufbau prinzipiell realisieren. Dazu wird eine „Unterlage“ benötigt, deren Reflexionsgrad *einstellbar* ist. Die Prinzipskizze für einen solchen Versuchsaufbau zur direkten Bestimmung von  $\rho_{\infty}$  an der Einzelschicht ist in Abb. 6.11 dargestellt.

Die Lichtquelle  $Q_1$  beleuchtet die zu untersuchende Schicht. Der reflektierte Lichtanteil wird durch den Detektor  $D_1$  erfaßt. Damit besteht der Versuchsaufbau zunächst aus einem Reflexionsphotometer, wie es zur Bestimmung des Reflexionsgrades verwendet wird. Die „Unterlage“ mit einstellbarem Reflexionsgrad ist prinzipiell durch einen analogen Aufbau mit einer weiteren Lichtquelle  $Q_2$  und einem weiteren Lichtdetektor  $D_2$  denkbar, wobei die Lichtemission der Lichtquelle  $Q_2$  proportional zum einfallenden Licht am Detektor  $D_2$  geregelt werden muß. Der Proportionalitätsfaktor  $V$  ist dann gleichzeitig der Reflexionsgrad  $\rho_s$  der „Unterlage“.



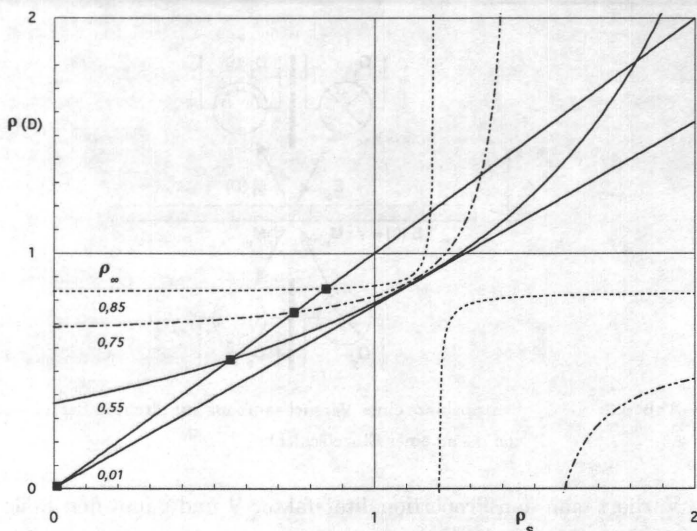


**Abb. 6.3:** Prinzipskizze eines Versuchsaufbaus zur direkten Bestimmung von  $\rho_\infty$  an einer Einzelschicht.

Variiert man den Proportionalitätsfaktor  $V$  und damit den Reflexionsgrad  $\rho_s$  der „Unterlage“ und mißt gleichzeitig den resultierenden Reflexionsgrad auf der Schichtoberseite, so läßt sich ein Wert  $\rho_s < 1$  finden, für den der Reflexionsgrad  $\rho(D)$  der Schicht genau dem Reflexionsgrad  $\rho_s$  der „Unterlage“ entspricht - die erste Gleichgewichtsbedingung ist dann erfüllt. Entsprechend ist die zweite Gleichgewichtsbedingung im Bereich  $\rho_s > 1$  einzustellen, sofern die Lichtquelle  $Q_2$  die erforderliche Leistung erbringt.

In der Abb. 6.4 ist die Abhängigkeit des Reflexionsgrades  $\rho(D)$  der Schicht vom Proportionalitätsfaktor  $V$  bzw. dem Reflexionsgrad  $\rho_s$  der „Unterlage“ dargestellt für unterschiedliche Werte  $\rho_\infty$ . Eine Gleichgewichtsbedingung ist genau dann erfüllt, wenn der Verlauf der Funktion  $\rho(D) = \rho(\rho_s)$  mit der Diagonalen  $\rho(D) = \rho_s$  zusammentrifft. Gerade auch an dünnen Schichten und insbesondere bei kleinem  $\rho_\infty$  läßt sich damit der Reflexionsgrad der unendlich dicken Schicht exakt bestimmen.

Die Funktionsverläufe der Abb. 6.4 wurden mit Hilfe der Gleichung 6.9 für verschiedene Parameter  $\rho_\infty$  berechnet.



**Abb. 6.4:** Reflexionsgrad der Schicht  $\rho(D)$  in Abhängigkeit von  $\rho_s$ ; dargestellt für unterschiedliche Parameter  $\rho_\infty$ ;  $a = 0,00125 \mu\text{m}^{-1}$  ( $D = 100 \mu\text{m}$ ).

Eine Fehlerbetrachtung zur hier vorgeschlagenen Bestimmungsmethode von  $\rho_\infty$  bestätigt die wesentlich höhere Genauigkeit des Verfahrens gegenüber der Standard-Vorgehensweise, wie sie in Kapitel 5 beschrieben wurde. Mit zunehmendem Wert von  $\rho_\infty$  wird der Fehlereinfluß, der einer meßtechnischen Bestimmung immer anhaftet, jetzt sogar geringer und verstärkt sich nicht überproportional, wie im vorgenannten Fall. Der Fehler bei der Bestimmung von  $\rho_\infty$  ergibt sich aus der Steigung des Funktionsverlaufs von  $\rho(D)$  gemäß Gleichung 6.9 und der Unschärfe von  $\rho_s$ :

$$\Delta\rho_\infty = \frac{\partial\rho(D)}{\partial\rho_s} \Delta\rho_s \quad (6.18)$$

Die Steigung des Funktionsverlaufs von  $\rho(D)$  an der Stelle  $\rho_s = \rho_\infty$  hängt ab vom Streukoeffizienten  $s$ , der Materialdicke  $D$  und dem Reflexionsgrad  $\rho_\infty$ :

$$\left. \frac{\partial\rho(D)}{\partial\rho_s} \right|_{\rho_s = \rho_\infty} = \frac{1}{e^{2\alpha s D}} \quad (6.19)$$

Für reelle, positive Werte  $\alpha$ ,  $s$  und  $D$  gilt

$$\frac{1}{e^{2\alpha s D}} < 1, \quad (6.20)$$

so daß der absolute Fehler  $\Delta\rho_\infty$  immer kleiner ist als der Fehler  $\Delta\rho_s$ . Gerade bei bedruckstoffrelevanten Schichten, hier gilt in aller Regel  $0,5 < \rho_\infty < 1$ , verläuft die Funktion  $\rho(D)$  im Bereich  $\rho_s = \rho_\infty$ , wie in der Abb. 6.4 zu erkennen, sehr flach, d. h. mit einer Steigung, die deutlich kleiner ist als 1.

Bei der hier vorgeschlagenen Methode liegt kein systematischer Fehler bei der Bestimmung von  $\rho_s$  vor, wie es im Falle der oben dargestellten Methoden der Fall ist, und der Meßfehler von  $\rho_s$  hat eine unterproportionale Wirkung auf  $\rho_\infty$ .

Zur Berechnung von  $a/s$  aus  $\rho_\infty$  muß natürlich die KUBELKA-MUNK-Funktion, Gleichung 5.4, herangezogen werden. Entsprechend gilt dann auch die Fehlerrechnung von Kapitel 5.1.4. Eine möglichst genaue Bestimmung von  $\rho_\infty$  ist daher unerlässlich.

## 7 Lichtstreuung in Papier

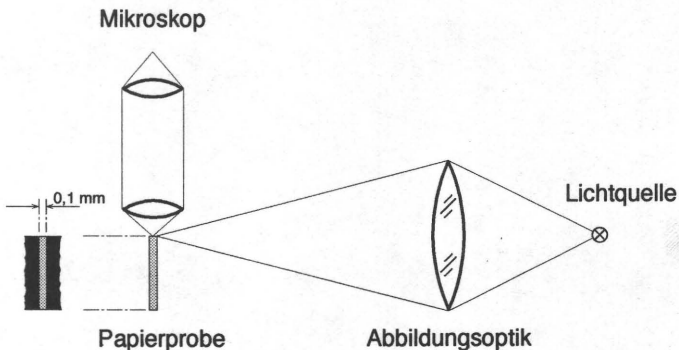
Papier ist der am meisten verwendete Bedruckstoff. Entsprechend wurden die voran dargestellten Überlegungen vorzugsweise auf Papier angewandt.

Zur Veranschaulichung der Streuung des Lichtes innerhalb der Papierstruktur wurde ein spezieller Versuchsaufbau gewählt, der es ermöglicht, das Streuverhalten unmittelbar am Querschnitt der Schicht zu beobachten. Es wurden dazu Papierproben mittels Mikrotom einseitig angeschnitten. Die entstehende Schnittfläche, ein Querschnitt durch die Papierschicht, diente anschließend als Beobachtungsfläche unter dem Mikroskop.

Die Papierproben wurden einseitig durch einen aufliegenden Spalt beleuchtet, während der Papierhintergrund abgedunkelt wurde. Unter dem Mikroskop ist das aus der Schnittebene zum Objektiv des Mikroskops hin austretende Streulicht als „Streubirne“ in der Papierschnittebene zu erkennen.

### 7.1 Versuchsaufbau

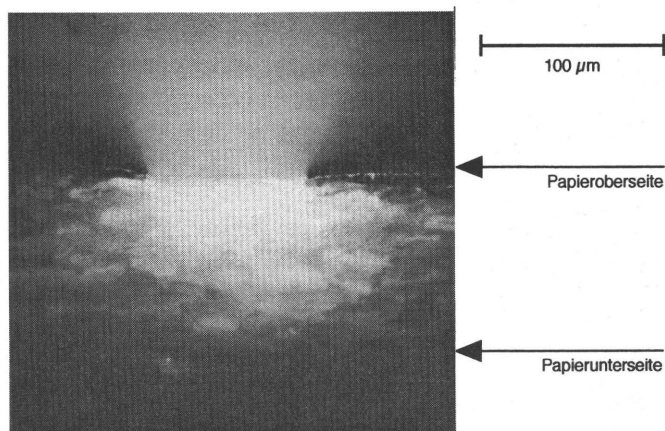
Die Abb. 7.1 zeigt eine Skizze des Versuchsaufbaus mit Lichtquelle, optischer Abbildung und Anordnung der Papierprobe zum Mikroskop.



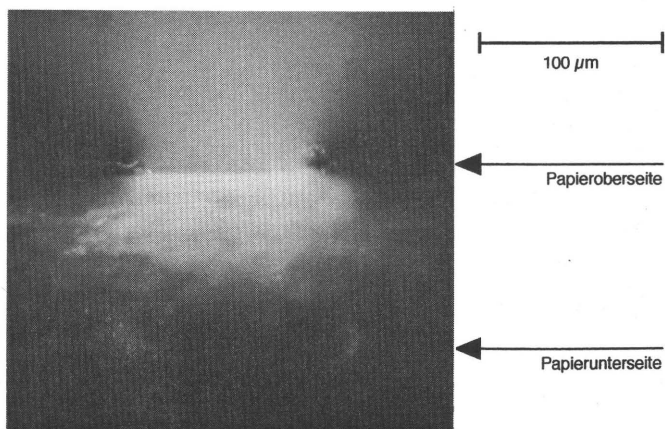
**Abb. 7.1:** Versuchsaufbau zur Beobachtung der Streulichtverteilung an Papierschnitten

## 7.2 Mikroskopaufnahmen

Die Abb. 7.2 und 7.3 stellen zwei repräsentative Aufnahmen der Streulichtverteilung in den untersuchten Papierschnitten dar. Abb. 7.2 zeigt die „Streu-  
birne“ in Naturpapier und Abb. 7.3 gibt das Streuverhalten für gestrichenes  
Papier exemplarisch wieder.



**Abb. 7.2:** Lichtstreuung an Naturpapier



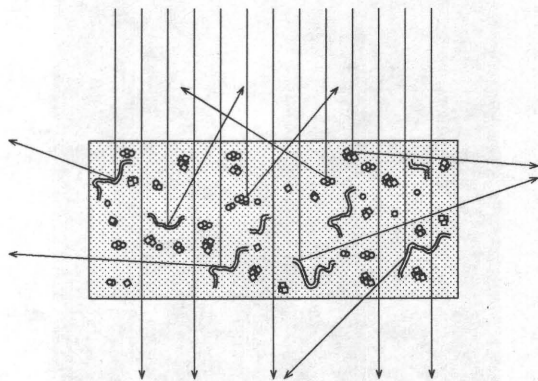
**Abb. 7.3:** Lichtstreuung an gestrichenem Papier

## 8 Zweidimensionales Streumodell

Die Mikroskopaufnahmen des vorausstehenden Abschnittes und die angeführten Überlegungen zur Lichtstreuung machen die Notwendigkeit deutlich, die Lichtstreuvorgänge innerhalb einer streuenden Schicht - hier: insbesondere Papier - mehrdimensional zu beschreiben. Zur Untersuchung der Lichtstreuung an Bedruckstoffen und dem unmittelbar daraus resultierenden Lichtfang-Effekt bei gerasterten Druckmustern ist die Einbeziehung zumindest einer weiteren Koordinate, der seitlichen Ausdehnung, neben der Dicke der Schicht unerlässlich.

Zur grundlegenden Erweiterung der eindimensionalen KUBELKA-MUNK-Theorie wird im folgenden ein zweidimensionales Streumodell entwickelt. Damit ist der Lichtfang-Effekt an Linienrasterdrucken bzw. das Streuverhalten des Bedruckstoffes an entsprechenden Kontrollfeldern zu beschreiben und der Einfluß auf das gedruckte Motiv abzuleiten.

Die Lichtstreuung im Bedruckstoff Papier ist in Abb. 8.1 schematisch an einem skizzierten Querschnitt der streuenden Schicht dargestellt. Die Fasern der Papierstruktur, die Pigmente und Füllstoffe stellen Streuzentren für das Licht dar.



**Abb. 8.1:** Schematische Darstellung der Lichtstreuung an den Fasern, Füllstoffen und Pigmenten der Papierschicht.

### 8.1 Streuansatz

KUBELKA und MUNK teilten die Lichtstreuanteile in zwei Halbräume und stellten die Energiebilanz für eine unendlich ausgedehnte, streuende Schicht in Einfallsrichtung - senkrecht zur Schichtoberfläche - und Reflexionsrichtung auf.

Durch die Betrachtung einer in Querrichtung unendlich ausgedehnten Schicht ist diese eindimensionale Bilanz der Strahlungsleistung identisch einer Bilanz der Bestrahlungsstärke  $E$  bzw. der spezifischen Ausstrahlung  $M$  - wie sie schließlich auch verwendet wurde.

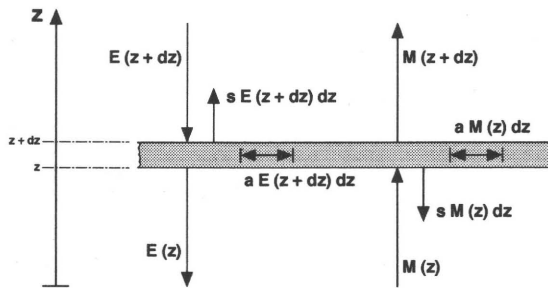


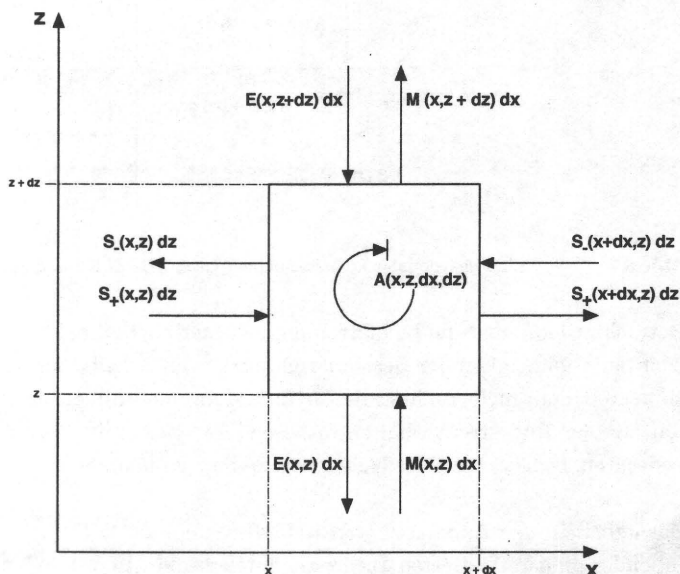
Abb. 8.2: Eindimensionales Lichtstreumodell nach KUBELKA und MUNK.

Betrachtet man aber die Lichtstreuung an einer partiell beleuchteten Schicht oder bei Abhängigkeit der Bestrahlungsstärke von der Oberflächenkoordinate, so kommt man nicht umhin, die Lichtstreuung mehrdimensional zu betrachten, um das Rückstreuverhalten insbesondere von auf der Oberfläche partiell bedeckten, bedruckten Oberflächen beschreiben zu können.

Zusätzlich zu den Annahmen von KUBELKA und MUNK, die nur einen einfallenden und reflektierten Lichtstreuanteil senkrecht zur Schichtoberfläche betrachten, werden nun auch Streuanteile parallel zur Oberfläche der streuenden Schicht in die Berechnung mit einbezogen.

Betrachten wir dazu ein zweidimensionales rechtwinkliges Flächenelement mit dem Flächeninhalt  $dx \, dz$  als Teilfläche des Querschnittes durch die streuende Schicht. Fällt nun auf die Oberfläche der streuenden Schicht Licht, dessen Bestrahlungsstärke in der Koordinatenrichtung senkrecht zur Fläche  $dx \, dz$  ortsunabhängig ist, so ist das Lichtstreuverhalten rein zweidimensional zu beschreiben. Ein Anwendungsbeispiel dafür ist ein Linienraster auf einer streuenden Oberfläche; vorausgesetzt, in Linienrichtung existiert eine konstante Bestrahlungsstärke.

Die Transmissionsfunktion des Linienrasters, die sich ergibt aus der Linienbreite, dem Linienabstand und der Transparenz der Linien selbst, moduliert die Bestrahlungsstärke des in die streuende Schicht einfallenden Lichtes in  $x$ -Richtung, die senkrecht zur Linienrichtung und parallel zur Schichtoberfläche verläuft.



**Abb. 8.3:** Zweidimensionale Leistungsbilanz der gestreuten und absorbierten Lichtanteile am Flächenelement  $dx \, dz$  einer streuenden Schicht.



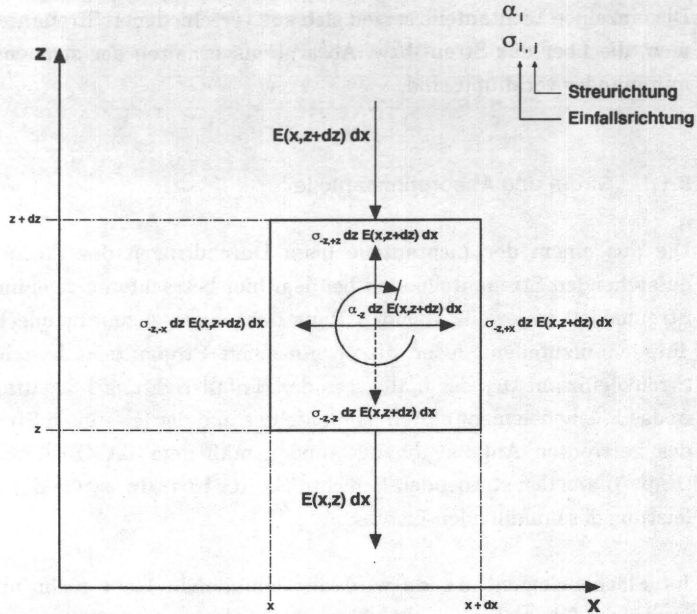
Die einzelnen Lichtanteile setzen sich aus verschiedenen Streuteilen zusammen, die über das Streu- bzw. Absorptionsverhalten der streuenden Schicht miteinander verknüpft sind.

### 8.1.1 Streu- und Absorptionsanteile

Die aus einem der Lichtanteile beim Durchdringen des Flächenelementes entstehenden Streuteile sind bei dem hier betrachteten zweidimensionalen Streumodell in jeweils vier den Raumrichtungen zuzuordnende Einzelstreuteile aufzuteilen. Jeder dieser einzelnen Streuteile besteht aus dem Streukoeffizient  $\sigma_{i,j}$ , der i. allg. von der Einfallsrichtung  $i$  des ursprünglichen in das Flächenelement einfallenden Lichtes und der jeweiligen Streurichtung  $j$  des gestreuten Anteils abhängt, und gemäß dem LAMBERTschen Gesetz (Kap. 3) aus der streuenden Schichtdicke  $dx$  bzw.  $dz$  sowie der Strahlungsleistung des einfallenden Lichtes.

Im Flächenelement  $dx dz$  wird das einfallende Licht nicht nur gestreut, sondern auch teilweise absorbiert. Der Absorptionsanteil ist proportional einem i. allg. richtungsabhängigen Absorptionskoeffizienten  $\alpha_i$ , der absorbierenden Schichtdicke  $dx$  bzw.  $dz$  und der ursprünglichen Strahlungsleistung.

Die Streulicht- und Absorptionsanteile zeigt Abb. 8.4 in exemplarischer Weise für den einfallenden Lichtanteil  $E(x,z+dz) dx$  beim Durchdringen in negativer  $z$ -Richtung.



**Abb. 8.4:** Lichtstreuanteile und Lichtabsorption für einen Lichtanteil beim Durchdringen des Flächenelements  $dx \, dz$ .

Anders als der absorbierte Anteil verschwinden die Streuanteile in der Bilanz nicht spurlos, sondern sie müssen den entsprechenden Strahlungsleistungen der in gleicher Richtung verlaufenden Lichtanteile gutgeschrieben werden bzw. als Verluste in der entsprechenden Richtung verbucht werden.

Der Streuanteil, der in gleicher Richtung wie das ursprünglich einfallende Licht verläuft, geht nicht explizit in die Bilanz mit ein, da er im ausfallenden Anteil enthalten ist.

## 8.2 Bilanzgleichungen

Die Bilanz aller am Flächenelement  $\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dz}$  ein- und austretenden Lichtanteile führt schließlich zu einem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dx} &= E(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad - (\sigma_{-z, +z} + \sigma_{-z, +x} + \sigma_{-z, -x} + \alpha_{-z}) \cdot \mathbf{dz} \cdot E(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad + \sigma_{+z, -z} \cdot \mathbf{dz} \cdot M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad + \sigma_{+x, -z} \cdot \mathbf{dx} \cdot S_+(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad + \sigma_{-x, -z} \cdot \mathbf{dx} \cdot S_-(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}
 M(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}) \cdot \mathbf{dx} &= M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad - (\sigma_{+z, -z} + \sigma_{+z, +x} + \sigma_{+z, -x} + \alpha_{+z}) \cdot \mathbf{dz} \cdot M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad + \sigma_{-z, +z} \cdot \mathbf{dz} \cdot E(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad + \sigma_{+x, +z} \cdot \mathbf{dx} \cdot S_+(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad + \sigma_{-x, +z} \cdot \mathbf{dx} \cdot S_-(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}
 S_+(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} &= S_+(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad - (\sigma_{+x, -x} + \sigma_{+x, -z} + \sigma_{+x, +z} + \alpha_{+x}) \cdot \mathbf{dx} \cdot S_+(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad + \sigma_{-x, +x} \cdot \mathbf{dx} \cdot S_-(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad + \sigma_{-z, +x} \cdot \mathbf{dz} \cdot E(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad + \sigma_{+z, +x} \cdot \mathbf{dz} \cdot M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dx}
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned}
 S_-(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} &= S_-(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad - (\sigma_{-x, +x} + \sigma_{-x, +z} + \sigma_{-x, -z} + \alpha_{-x}) \cdot \mathbf{dx} \cdot S_-(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad + \sigma_{+x, -x} \cdot \mathbf{dx} \cdot S_+(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz} \\
 &\quad + \sigma_{+z, -x} \cdot \mathbf{dz} \cdot M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{dx} \\
 &\quad + \sigma_{-z, -x} \cdot \mathbf{dz} \cdot E(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}) \cdot \mathbf{dx}
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Die Funktionen  $E(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz})$ ,  $M(\mathbf{x}, \mathbf{z} + \mathbf{dz})$ ,  $S_+(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z})$  und  $S_-(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{z})$  werden jeweils als Taylorsche Reihe entwickelt /BRONSTEIN, 1979/. Unter der Annahme, daß die Funktionen über einer Änderung  $\mathbf{dx}$  bzw.  $\mathbf{dz}$  entlang der Koordinaten  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{z}$  allein durch einen linearen Zuwachs zu beschreiben,

/BRONSTEIN, 1979/

I. N. Bronstein, K.A. Semedjajew,  
Taschenbuch der Mathematik, 18. Auflage,  
Thun - Frankfurt/Main: Harri Deutsch(1979)

gleichmäßig stetig und endlich sind, erhält man schließlich ein Gleichungssystem mit partiellen Differentialen.

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{x}, z) \cdot d\mathbf{x} = & \left[ E(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial E(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz \right] \cdot d\mathbf{x} \\
 & - (\sigma_{-z, +z} + \sigma_{-z, +x} + \sigma_{-z, -x} + \alpha_{-z}) \cdot dz \cdot \left[ E(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial E(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz \right] \cdot d\mathbf{x} \\
 & + \sigma_{+z, -z} \cdot dz \cdot M(\mathbf{x}, z) \cdot d\mathbf{x} \\
 & + \sigma_{+x, -z} \cdot d\mathbf{x} \cdot S_+(\mathbf{x}, z) \cdot dz \\
 & + \sigma_{-x, -z} \cdot d\mathbf{x} \cdot \left[ S_-(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial S_-(\mathbf{x}, z)}{\partial x} dx \right] \cdot dz
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ M(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial M(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz \right] \cdot d\mathbf{x} = & M(\mathbf{x}, z) \cdot d\mathbf{x} \\
 & - (\sigma_{+z, -z} + \sigma_{+z, +x} + \sigma_{+z, -x} + \alpha_{+z}) \cdot dz \cdot M(\mathbf{x}, z) \cdot d\mathbf{x} \\
 & + \sigma_{-z, +z} \cdot dz \cdot \left[ E(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial E(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz \right] \cdot d\mathbf{x} \\
 & + \sigma_{+x, +z} \cdot d\mathbf{x} \cdot S_+(\mathbf{x}, z) \cdot dz \\
 & + \sigma_{-x, +z} \cdot d\mathbf{x} \cdot \left[ S_-(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial S_-(\mathbf{x}, z)}{\partial x} dx \right] \cdot dz
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ S_+(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial S_+(\mathbf{x}, z)}{\partial x} dx \right] \cdot dz = & S_+(\mathbf{x}, z) \cdot dz \\
 & - (\sigma_{+x, -x} + \sigma_{+x, -z} + \sigma_{+x, +z} + \alpha_{+x}) \cdot d\mathbf{x} \cdot S_+(\mathbf{x}, z) \cdot dz \\
 & + \sigma_{-x, +x} \cdot d\mathbf{x} \cdot \left[ S_-(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial S_-(\mathbf{x}, z)}{\partial x} dx \right] \cdot dz \\
 & + \sigma_{-z, +x} \cdot dz \cdot \left[ E(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial E(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz \right] \cdot d\mathbf{x} \\
 & + \sigma_{+z, +x} \cdot dz \cdot M(\mathbf{x}, z) \cdot d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}
 S_-(\mathbf{x}, z) \cdot dz = & \left[ S_-(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial S_-(\mathbf{x}, z)}{\partial x} dx \right] \cdot dz \\
 & - (\sigma_{-x, +x} + \sigma_{-x, +z} + \sigma_{-x, -z} + \alpha_{-x}) \cdot d\mathbf{x} \cdot \left[ S_-(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial S_-(\mathbf{x}, z)}{\partial x} dx \right] \cdot dz \\
 & + \sigma_{+x, -x} \cdot d\mathbf{x} \cdot S_+(\mathbf{x}, z) \cdot dz \\
 & + \sigma_{+z, -x} \cdot dz \cdot M(\mathbf{x}, z) \cdot d\mathbf{x} \\
 & + \sigma_{-z, -x} \cdot dz \cdot \left[ E(\mathbf{x}, z) + \frac{\partial E(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz \right] \cdot d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Die Funktionen  $E(\mathbf{x}, z)$ ,  $M(\mathbf{x}, z)$ ,  $S_+(\mathbf{x}, z)$  und  $S_-(\mathbf{x}, z)$  werden im folgenden ohne die Variablen  $\mathbf{x}$  und  $z$  abkürzend als  $E$ ,  $M$ ,  $S_+$  und  $S_-$  aufgeführt.

$$0 = \left[ \frac{\partial E}{\partial z} - (\sigma_{-z,+z} + \sigma_{-z,+x} + \sigma_{-z,-x} + \alpha_-) E + \sigma_{+z,-z} M + \sigma_{+x,-z} S_+ + \sigma_{-x,-z} S_- \right] dx dz - (\sigma_{-z,+z} + \sigma_{-z,+x} + \sigma_{-z,-x} + \alpha_-) \frac{\partial E}{\partial z} dz^2 dx + \sigma_{-x,-z} \frac{\partial S_-}{\partial x} dx^2 dz \quad (8.9)$$

$$0 = \left[ -\frac{\partial M}{\partial z} - (\sigma_{+z,-z} + \sigma_{+z,+x} + \sigma_{+z,-x} + \alpha_+) M + \sigma_{-z,+z} E + \sigma_{+x,+z} S_+ + \sigma_{-x,+z} S_- \right] dx dz + \sigma_{-z,+z} \frac{\partial E(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz^2 dx + \sigma_{-x,+z} \frac{\partial S_-(\mathbf{x}, z)}{\partial x} dx^2 dz \quad (8.10)$$

$$0 = \left[ -\frac{\partial S_+}{\partial x} - (\sigma_{+x,-x} + \sigma_{+x,-z} + \sigma_{+x,+z} + \alpha_{+x}) S_+ + \sigma_{+z,+x} M + \sigma_{-z,+x} E + \sigma_{-x,+x} S_- \right] dx dz + \sigma_{-z,+x} \frac{\partial E}{\partial z} dz^2 dx + \frac{\partial S_-}{\partial x} dx^2 dz \quad (8.11)$$

$$0 = \left[ \frac{\partial S_-}{\partial x} - (\sigma_{-x,+x} + \sigma_{-x,+z} + \sigma_{-x,-z} + \alpha_-) S_- + \sigma_{+z,-x} M + \sigma_{-z,-x} E + \sigma_{+x,-x} S_+ \right] dx dz - (\sigma_{-x,+x} + \sigma_{-x,+z} + \sigma_{-x,-z} + \alpha_-) \frac{\partial S_-}{\partial x} dx^2 dz + \sigma_{-z,-x} \frac{\partial E(\mathbf{x}, z)}{\partial z} dz dx^2 \quad (8.12)$$

Im Grenzübergang zu infinitesimalen Größen  $d\mathbf{x}$  bzw.  $dz$  ergibt sich für die Beschreibung der zweidimensionalen Lichtstreuung und -absorption ein System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial E}{\partial z} - (\sigma_{-z,+z} + \sigma_{-z,+x} + \sigma_{-z,-x} + \alpha_-) E = -\sigma_{+z,-z} M - \sigma_{+x,-z} S_+ - \sigma_{-x,-z} S_- \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} + (\sigma_{+z,-z} + \sigma_{+z,+x} + \sigma_{+z,-x} + \alpha_+) M = +\sigma_{-z,+z} E + \sigma_{+x,+z} S_+ + \sigma_{-x,+z} S_- \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial S_+}{\partial x} + (\sigma_{+x,-x} + \sigma_{+x,-z} + \sigma_{+x,+z} + \alpha_{+x}) S_+ = +\sigma_{+z,+x} M + \sigma_{-z,+x} E + \sigma_{-x,+x} S_- \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial S_-}{\partial x} - (\sigma_{-x,+x} + \sigma_{-x,+z} + \sigma_{-x,-z} + \alpha_-) S_- = -\sigma_{+z,-x} M - \sigma_{-z,-x} E - \sigma_{+x,-x} S_+ \quad (8.15)$$

Das Gleichungssystem ist in dieser Form analytisch nicht allgemeingültig lösbar, da es sich um gekoppelte Differentialgleichungen handelt. Die Lösung ist aber für Spezialfälle numerisch möglich.

## 9 Isotrope Streuung

Das Differentialgleichungssystem, das die Streuvorgänge zweidimensional beschreibt, beinhaltet  $2n(2n-1) = 12$  Streu- und  $2n = 4$  Absorptionskoeffizienten, wobei  $n = 2$  die Dimension des betrachteten streuenden Raumes (hier: Flächenelement  $dx dz$ ) ist. Für den allgemeinen Ansatz mit richtungsabhängigen Streu- und Absorptionskoeffizienten müßten demnach mindestens 16 verschiedene Messungen zur Bestimmung der allg. unterschiedlichen Koeffizienten durchgeführt werden. Da dies in der Praxis nahezu nicht durchführbar ist, soll in der weiteren Berechnung der Streufunktionen ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit des differentiellen Ansatzes nur die rein isotrope Streuung betrachtet werden. Alle Streu- und Absorptionskoeffizienten sind dann richtungsunabhängig.

### 9.1 Differentialgleichungssystem

Das Gleichungssystem für die Beschreibung rein isotroper Streuung im zweidimensionalen Raum lautet:

$$\frac{\partial E}{\partial z} - (3\sigma + \alpha) E = -\sigma (M + S_+ + S_-) \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} + (3\sigma + \alpha) M = +\sigma (E + S_+ + S_-) \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial S_+}{\partial x} + (3\sigma + \alpha) S_+ = +\sigma (E + M + S_-) \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial S_-}{\partial x} - (3\sigma + \alpha) S_- = -\sigma (E + M + S_+) \quad (9.4)$$

mit den Randbedingungen:

$$E(x, D) = E_0(x) \quad (9.5)$$

$$M(x, 0) = \rho_s E(x, 0) \quad (9.6)$$

## 9.2 Fouriertransformation

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems ist es zunächst erforderlich, die Gleichungen zu entkoppeln, da es sich um ein linear unabhängiges, aber gekoppeltes Gleichungssystem partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung handelt.

Die Entkopplung des Gleichungssystems wird erreicht durch eine Fouriertransformation entlang der x-Koordinate, wie nachfolgend dargestellt:

$$\hat{f}(\xi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x, z) dx \quad (9.7)$$

Die Operation der Ableitung ist im Bildbereich der Fouriertransformation eine Multiplikation mit der unabhängigen Variablen  $\xi$  und  $i$ , der imaginären Einheit. Dieser Zusammenhang folgt direkt aus der Ableitung der Fouriertransformation, Gleichung 9.7, und ist entsprechend in der Literatur zu finden /BRONSTEIN, 1989/. Das transformierte Gleichungssystem lautet damit:

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial z} - (3\sigma + \alpha) \hat{E} = -\sigma (\hat{M} + \hat{S}_+ + \hat{S}_-) \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial z} + (3\sigma + \alpha) \hat{M} = +\sigma (\hat{E} + \hat{S}_+ + \hat{S}_-) \quad (9.9)$$

und

$$i\xi \hat{S}_+ + (3\sigma + \alpha) \hat{S}_+ = +\sigma (\hat{E} + \hat{M} + \hat{S}_-) \quad (9.10)$$

$$i\xi \hat{S}_- - (3\sigma + \alpha) \hat{S}_- = -\sigma (\hat{E} + \hat{M} + \hat{S}_+) \quad (9.11)$$

In der dargestellten Form wird es möglich, aus den beiden letzten Gleichungen (9.10 und 9.11) die beiden fouriertransformierten Streufunktionen  $\hat{S}_+$  und  $\hat{S}_-$  bzw. deren Summe unmittelbar zu bestimmen.

---

/BRONSTEIN, 1989/

I. N. Bronstein, K.A. Semedjajew,  
Taschenbuch der Mathematik, 24. Auflage,  
Thun - Frankfurt/Main: Harri Deutsch(1989)

---

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \frac{2\sigma(4\sigma + \alpha)}{\xi^2 + (4\sigma + \alpha)(2\sigma + \alpha)} (\hat{E} + \hat{M}) \quad (9.12)$$

Die ausführliche Herleitung der Gleichung 9.12 ist im Anhang nachzulesen.

Das ursprüngliche Gleichungssystem mit den vier gekoppelten Differentialgleichungen wird mit der vorstehenden Gleichung (9.12) auf ein Differentialgleichungssystem mit zwei gekoppelten Gleichungen reduziert. Das reduzierte Gleichungssystem beinhaltet nun alleine die interessierenden Größen  $\hat{E}$  und  $\hat{M}$ , d. h. deren Abbildungen  $\hat{E}$  und  $\hat{M}$  durch die Fouriertransformation.

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial z} - (\beta + \delta) \hat{E} = -\beta \hat{M} \quad (9.13)$$

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial z} + (\beta + \delta) \hat{M} = +\beta \hat{E} \quad (9.14)$$

mit

$$\beta = \sigma - \frac{2\sigma^2(4\sigma + \alpha)}{\xi^2 + (4\sigma + \alpha)(2\sigma + \alpha)} \quad (9.15)$$

und

$$\delta = 2\sigma + \alpha \quad (9.16)$$

Diese zweidimensionale Beschreibung isotroper Streuung im Bildbereich der Fouriertransformation, Gleichung (9.13) und (9.14), entspricht in der oben dargestellten Form mit den Abkürzungen  $\beta$  und  $\delta$  exakt dem eindimensionalen Ansatz von KUBELKA und MUNK, betrachtet man  $\beta$  und  $\delta$  als  $\xi$ -abhängige Extinktions-Koeffizienten /9.1/.  $\hat{E}(\xi, z)$  und  $\hat{M}(\xi, z)$  sind dabei die fourier-transformierten Funktionen von  $E(x, z)$  und  $M(x, z)$  entlang der  $x$ -Koordinate.

---

/9.1/ Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß  $\beta$  und  $\delta$  physikalisch keine Extinktionskoeffizienten sind, sondern die oben definierten mathematischen Abkürzungen (9.15) und (9.16), die die Extinktionskoeffizienten enthalten.

---



### 9.3 Lösung im Bildbereich der Fouriertransformation ( $x \rightarrow \xi$ )

Die Lösungen sind entsprechend der in Kapitel 6.1 für den KUBELKA-MUNK-Ansatz vorgeschlagenen Weise durch Separation der Funktionen zu finden. Analog ergibt sich ein Differentialgleichungssystem 2. Grades im Bildbereich der Fouriertransformation:

$$\hat{M} = - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \hat{E}}{\partial z} - (\beta + \delta) \hat{E} \right] \quad (9.17)$$

und

$$\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial z^2} + [\beta^2 - (\beta + \delta)^2] \hat{E} = 0 \quad (9.18)$$

Mit den transformierten Randbedingungen

$$\hat{E}(\xi, D) = \hat{E}_0(\xi) \quad (9.19)$$

$$\hat{M}(\xi, 0) = \rho_s \hat{E}(\xi, 0) \quad (9.20)$$

lauten die Lösungen im Bildbereich der Fouriertransformation

$$\hat{E}(\xi, z) = \hat{E}_0(\xi) \frac{h(\xi, z)}{h(\xi, D)} \quad (9.21)$$

und

$$\hat{M}(\xi, z) = \hat{E}_0(\xi) \frac{k(\xi, z)}{h(\xi, D)} \quad (9.22)$$

Die Funktionen  $h(\xi, z)$  und  $k(\xi, z)$  lauten:

$$h(\xi, z) = \left[ \frac{1}{\phi} - \rho_s \right] e^{+\varepsilon \beta z} + [\rho_s - \phi] e^{-\varepsilon \beta z} \quad (9.23)$$

und

$$k(\xi, z) = [1 - \rho_s \phi] e^{+\varepsilon \beta z} + \left[ \frac{\rho_s}{\phi} - 1 \right] e^{-\varepsilon \beta z} \quad (9.24)$$

mit der Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\phi} - \phi \right] \quad (9.25)$$

dabei ist  $\phi$  mit  $\beta$  und  $\delta$  durch die nachfolgend dargestellte Relation verknüpft. Sie entspricht exakt - im Bildbereich der Fouriertransformation bezüglich der x-Koordinate - der Beziehung der KUBELKA-MUNK-Funktion (5.4):

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{(1 - \phi)^2}{2\phi} \quad (9.26)$$

Für die physikalische Beschreibung der Lichtstreuung von Interesse ist insbesondere die Funktion  $M(x, z)$ , die sich aus der Rücktransformation der Gl. (9.22) ergibt.

$\phi$  ist im Bildbereich der Fouriertransformation das Pendant zu  $\rho_\infty$  aus der eindimensionalen KUBELKA-MUNK-Funktion. Im Gegensatz zu  $\rho_\infty$  kann  $\phi$  jedoch nicht direkt meßtechnisch bestimmt werden.

Die funktionelle Abhängigkeit von den Extinktionskoeffizienten zeigen die nachfolgenden Beziehungen:

$$\phi = 1 + \frac{[\delta]}{[\beta]} - \sqrt{2 \frac{[\delta]}{[\beta]} + \frac{[\delta]^2}{[\beta]^2}} \quad (9.27)$$

und

$$\varepsilon = \sqrt{2 \frac{[\delta]}{[\beta]} + \frac{[\delta]^2}{[\beta]^2}} \quad (9.28)$$

Damit läßt sich  $\hat{\mathbf{E}}(\xi, \mathbf{z})$  und  $\hat{\mathbf{M}}(\xi, \mathbf{z})$  als Funktion von  $\xi$  und  $\mathbf{z}$  für beliebige Streu- bzw. Absorptionskoeffizienten  $\sigma$  und  $\alpha$ , die wiederum über die Vorschrift (9.15) und (9.16) mit  $\beta$  und  $\delta$  verknüpft sind, berechnen.

Mit Hilfe einer diskreten Rücktransformation werden die Funktionen  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  und  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  numerisch bestimmbar.

Im nächsten Kapitel sollen zunächst zwei Sonderfälle betrachtet werden, bei denen eine direkte analytische Rücktransformation möglich ist.

#### 9.4 Trivialfall $\sigma = 0$

Für den Sonderfall eines nicht streuenden Mediums, d. h.  $\sigma = 0$ , ist die Lösungsfunktion für die spezifische Ausstrahlung  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  und die Bestrahlungsstärke  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  direkt analytisch zu bestimmen.

Im Trivialfall  $\sigma = 0$  folgt daraus unmittelbar  $\beta = 0$  und  $\delta = \alpha$ .

Die Lösungen lauten im Falle reiner Absorption:

$$\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) e^{-\alpha(\mathbf{z} - \mathbf{D})} \quad (9.29)$$

und

$$\mathbf{M}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) e^{-\alpha(\mathbf{z} + \mathbf{D})} \quad (9.30)$$

Es ergeben sich die beiden Absorptionsgleichungen (9.29) und (9.30) in der bekannten Form.

### 9.5 Analytische Rücktransformation für $E_0(\mathbf{x}) = 1$

Die gesuchten Lösungen der Streugleichungen, insbesondere die spezifische Ausstrahlung  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , kann für einen weiteren wichtigen Sonderfall analytisch gefunden werden.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei an dieser Stelle der Fall

$$E_0(\mathbf{x}) = 1, E_0(\mathbf{x}) \text{ sei normiert und damit dimensionslos,} \quad (9.31)$$

stellvertretend für alle Fälle  $E_0(\mathbf{x}) = \text{const.}$  betrachtet:

Die Fouriertransformierte von  $E_0(\mathbf{x}) = 1$  lautet

$$\hat{E}_0 = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.32)$$

In diesem Fall sind die beiden Funktionen  $\hat{E}(\xi, \mathbf{z})$  und  $\hat{M}(\xi, \mathbf{z})$  im Bildbereich der Fouriertransformation nur an der Stelle  $\xi = 0$  definiert. Es gilt:

$$\beta_0 = \beta|_{\xi=0} = -\frac{\sigma \alpha}{2\sigma + \alpha} \quad (9.33)$$

und

$$\delta_0 = \delta|_{\xi=0} = \delta - 2\sigma + \alpha \quad (9.34)$$

Die Lösungen für die Bestrahlungsstärke und die spezifische Ausstrahlung lauten nach der Rücktransformation:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{h(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{h(\mathbf{x}, \mathbf{D})} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon(\delta_0, \beta_0); \phi = \phi(\delta_0, \beta_0); \delta_0; \beta_0} \quad (9.35)$$

und

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{h(\mathbf{x}, \mathbf{D})} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon(\delta_0, \beta_0); \phi = \phi(\delta_0, \beta_0); \delta_0; \beta_0} \quad (9.36)$$

Der betrachtete Fall gleichmäßiger Bestrahlung entspricht den Betrachtungen von KUBELKA und MUNK. Aus dem Vergleich mit den rücktransformierten Lösungen ergeben sich folgende Kongruenz-Beziehungen zwischen der eindimensionalen und der zweidimensionalen Beschreibung der Lichtstreuung:

$$\rho_{\infty} \Leftrightarrow \phi \quad (9.37)$$

$$a \Leftrightarrow \alpha + 2 \sigma \quad (9.38)$$

$$s \Leftrightarrow \sigma \frac{\alpha}{\alpha + 2 \sigma} \quad (9.39)$$

Beide Extinktionskoeffizienten der KUBELKA-MUNK-Gleichungen beinhalten sowohl Streu- als auch Absorptionsanteile. Dies ist darin verständlich, daß die seitlichen Streu- bzw. Absorptionsanteile im KUBELKA-MUNK-Ansatz nicht differenziert betrachtet werden. Überwiegt die Absorption gegenüber den Streuanteilen ( $\alpha \gg \sigma$ ), dann entsprechen sich im betrachteten Fall gleichmäßiger Bestrahlungsstärke die Extinktionskoeffizienten der eindimensionalen und der zweidimensionalen Beschreibung der Lichtstreuung.

An dieser Stelle sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß  $\phi$  im Bildbereich der Fouriertransformation das Pendant zu  $\rho_{\infty}$  aus der eindimensionalen KUBELKA-MUNK-Funktion ist. Im Gegensatz zu  $\rho_{\infty}$  kann  $\phi$  jedoch nicht direkt meßtechnisch bestimmt werden.

## 9.6 Diskrete Rücktransformation

Für diskrete Werte von  $E_0(\mathbf{x})$  ergibt sich die Lösung für die spezifische Ausstrahlung  $M(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  und die Bestrahlungsstärke  $E(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  an der streuenden Schicht für den allgemeinen Fall durch numerische Berechnung.

Für zwei unterschiedlich stark streuende Medien wird dies auf den nachfolgenden Seiten exemplarisch gezeigt. Die Berechnung erfolgt dabei mit Hilfe der „Fast Fourier Transformation“ (FFT) gemäß /BRACEWELL, 1986/.

Für die Bestrahlungsstärke wurde - ohne Beschränkung der Allgemeinheit - für das Exempel eine Rechteckfunktion gewählt:

$$E_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} E_{00} & \text{für } \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.40)$$

Diese Funktion stellt den idealen Funktionsverlauf der Bestrahlungsstärke für eine linienförmige Beleuchtung dar; die Linienbreite beträgt  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ . Die Streueigenschaften werden durch die Extinktionskoeffizienten  $\sigma$  und  $\alpha$  beschrieben.

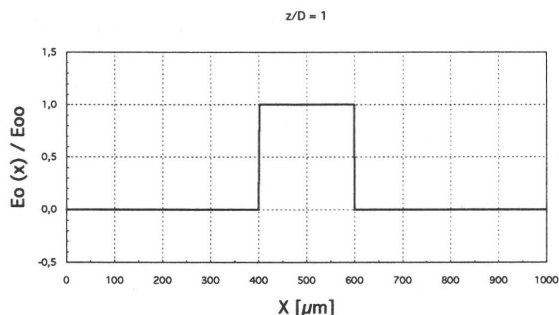
Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die Auswirkungen der seitlichen Lichtstreuung, der bei Rasterdrucken zu dem sogenannten „Lichtfangeffekt“ führt. Der Funktionsverlauf der Bestrahlungsstärke und der Funktionsverlauf der spezifischen Ausstrahlung zeigt mit zunehmender Eindringtiefe des Lichtes eine Verbreiterung gegenüber der Ausgangsfunktion - Ursache dafür ist die seitliche Streuung des Lichtes. Die Abbildungen zeigen die Bestrahlungsstärke und die spezifische Ausstrahlung als bezogene Größen. Bezugsgröße ist die Bestrahlungsstärke auf der Schichtoberfläche  $E_{00}$ .

---

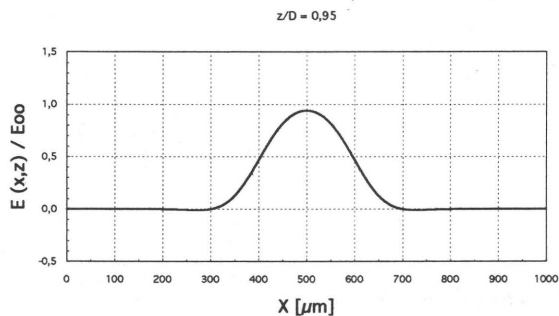
/BRACEWELL, 1986/

R. Bracewell,  
*The Fourier Transform and Its Applications*,  
 McGraw-Hill (1986)

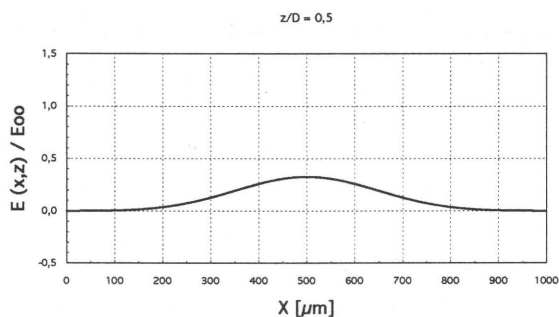
---



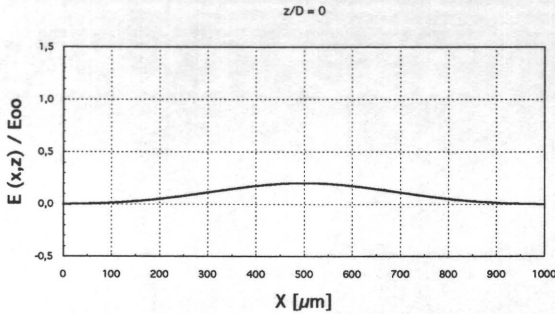
**Abb. 9.1:** Relative Bestrahlungsstärke  $E_0(x)/E_{00}$  an der Oberfläche der streuenden Schicht;  
 $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$



**Abb. 9.2:** Relative Bestrahlungsstärke  $E(x,z)/E_{00}$  innerhalb der streuenden Schicht;  
 $D = 100\mu\text{m}$ ,  $z = 0,95D$ ,  $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$ ;  $\sigma = 5\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\rho_s = 1$



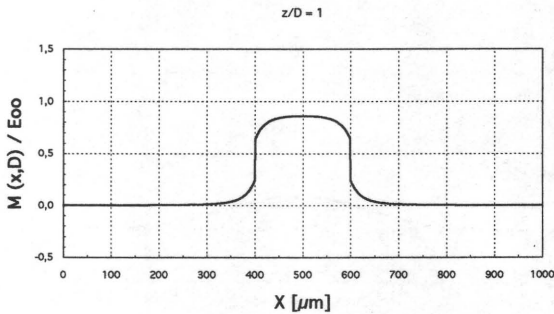
**Abb. 9.3:** Relative Bestrahlungsstärke  $E(x,z)/E_{00}$  innerhalb der streuenden Schicht;  
 $D = 100\mu\text{m}$ ,  $z = 0,5D$ ,  $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$ ;  $\sigma = 5\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\rho_s = 1$



**Abb. 9.4:** Relative Bestrahlungsstärke  $E(x,z)/E_{00}$  an der Unterfläche der streuenden Schicht;

$D = 100\mu\text{m}$ ,  $z = 0$ ,  $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$ ;  $\sigma = 5\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\rho_s = 1$

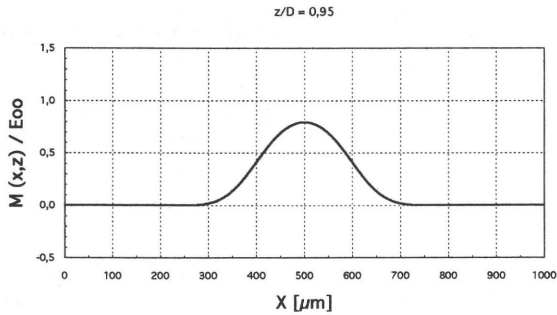
Die spezifische Ausstrahlung  $M(\mathbf{x},z)$  ändert sich ebenfalls mit den Koordinaten  $\mathbf{x}$  und  $z$ , wie in den Abbildungen 9.5 bis 9.8 dargestellt:



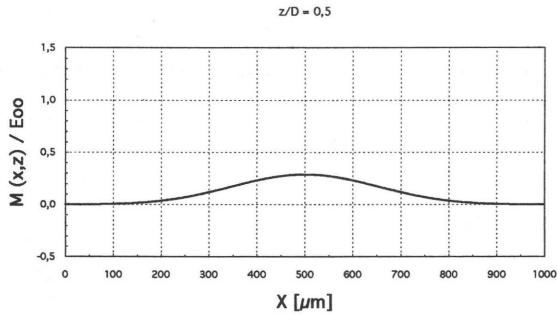
**Abb. 9.5:** Relative spezifische Ausstrahlung  $M(x,D)/E_{00}$  an der Schichtoberfläche;

$D = 100\mu\text{m}$ ,  $z = D$ ,  $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$ ;  $\sigma = 5\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\rho_s = 1$

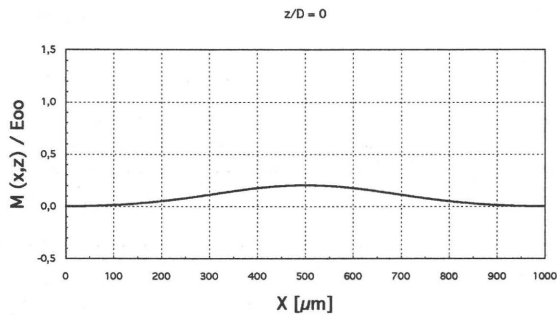




**Abb. 9.6:** Relative spezifische Ausstrahlung  $M(x,z)/E_{00}$  innerhalb der streuenden Schicht;  
 $D = 100\mu\text{m}$ ,  $z = 0,95D$ ,  $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$ ;  $\sigma = 5\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\rho_s = 1$



**Abb. 9.7:** Relative spezifische Ausstrahlung  $M(x,z)/E_{00}$  innerhalb der streuenden Schicht;  
 $D = 100\mu\text{m}$ ,  $z = 0,5D$ ,  $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$ ;  $\sigma = 5\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\rho_s = 1$



**Abb. 9.8:** Relative spezifische Ausstrahlung  $M(x,z)/E_{00}$  innerhalb der streuenden Schicht;  
 $D = 100\mu\text{m}$ ,  $z = 0$ ,  $x_0 = 400\mu\text{m}$ ,  $x_1 = 600\mu\text{m}$ ;  $\sigma = 5\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\rho_s = 1$

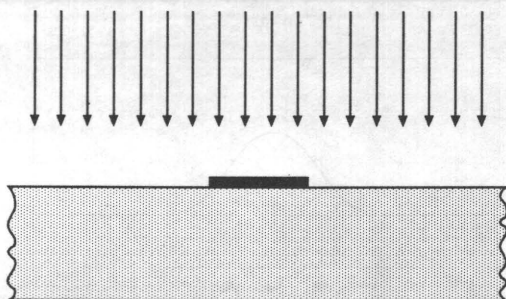


Abb. 9.9: Schnitt durch eine lichtundurchlässige Drucklinie auf einer streuenden Schicht

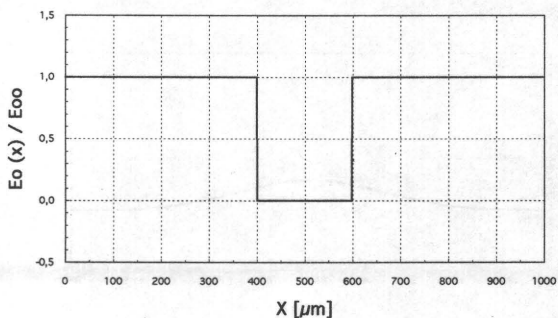


Abb. 9.10: Relative Bestrahlungsstärke  $E_0(x)/E_{00}$  an der Oberfläche der streuenden Schicht;

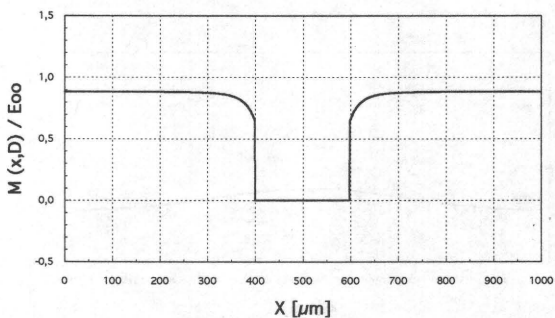


Abb. 9.11: Relative spezifische Ausstrahlung  $M(x,D)/E_{00}$  an der Schichtoberfläche;

$$D = 100\mu\text{m}, z = D; \sigma = 5\mu\text{m}^{-1}, \alpha = 0,2\mu\text{m}^{-1}, \rho_s = 1$$

Die Abb. 9.11 zeigt die relative spezifische Ausstrahlung  $M(x,z) / E_{00}$  - den Reflexionsgrad - an der Schichtoberfläche. Der Funktionsverlauf zeigt deutlich den Abfall der Lichtreflexion in der Nähe des Druckpunktes - den „Lichtfangeffekt“. Dieser „Lichtfangeffekt“ führt an Rasterdrucken zu einer merklichen Veränderung der optischen Meßwerte. Der Wert der optischen Dichte wird dadurch größer, da im Randbereich der Druckpunkte weniger Licht reflektiert wird, als an den druckfreien Bereichen der Schichtoberfläche. Dieser Randeffect hängt von der Druckpunktgröße und der Anzahl der Druckpunkte ab.

Die vorgestellten Diagramme zeigen erstmals die Ergebnisse einer mathematischen Bestimmung der zweidimensionalen Lichtstreuung, die zu dem als „Lichtfangeffekte“ bekannten Phänomen führen.

In dieser Arbeit wurde mit einem physikalisch begründeten Ansatz die zweidimensionale Streufunktion abgeleitet und daraus Funktionsverläufe für die spezifische Ausstrahlung berechnet.

Im Gegensatz zu den Streufunktionen von FISCHER oder RUCKDESCHEL und HAUSER handelt es sich hierbei nicht um parametrisierte Näherungsformeln mit angepaßten funktionalen Abhängigkeiten ohne physikalischen Ansatz.

## 10 Zusammenfassung

Die Lichtstreuung in Bedruckstoffen - in Papier - ist ein Thema, das in den vergangenen Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen hat. Fragen der Qualitätsbewertung von Druckmustern und der Einfluß des Bedruckstoffes auf die Druckqualität werden diesbezüglich ebenso diskutiert, wie neue Rastermethoden mit sehr kleinen Druckpunkten, die sich hinsichtlich der Auswirkung der Lichtstreuung auf dem Bedruckstoff ganz anders verhalten als konventionelle Raster.

Die vorliegende Arbeit geht zunächst von den strahlungsphysikalischen Grundlagen aus und stellt die wesentlichen Modelle und pragmatisch angesetzten Funktionen zur Beschreibung der Lichtstreuung an Rasterdrucken vor. Die KUBELKA-MUNK-Theorie ist Ursprungsthema dieser Arbeit. Anhand einer Fehlerrechnung werden zunächst die Schwächen dieser Betrachtungsweise dargestellt und ein möglicher Weg zur genaueren Bestimmung des Stoffparameters  $\rho_\infty$  gezeigt. Ein neuer Lösungsweg zur Berechnung der eindimensionalen Streugleichungen wird aufgezeigt und ist später Richtschnur zur Lösung des zweidimensionalen Ansatzes.

Neue Überlegungen zur KUBELKA-MUNK-Theorie führen schließlich zur zweidimensionalen Beschreibung der Lichtstreuung für den allgemeinen Fall isotroper Streuung. Die analytische Lösung gelingt im Sonderfall: Bei einem nicht streuenden Medium ergeben sich analytisch die Absorptionsgleichungen und im Falle konstanter Bestrahlungsstärke entsprechen die Lösungen den Ergebnissen der KUBELKA-MUNK-Theorie mit modifizierten Extinktionskoeffizienten.

Die allgemeinen Lösungen der Streufunktionen sind für beliebige Bestrahlungsstärkefunktionen diskret berechenbar. Sie ergeben sich numerisch durch inverse Fouriertransformation aus den Lösungsfunktionen der Streugleichungen, was am Beispiel einer linienförmigen Bestrahlung exemplarisch gezeigt wird. Für den „idealen“ Druckpunkt bzw. eine Drucklinie wird die relative spezifische Ausstrahlung - der Reflexionsgrad - einer streuenden Schicht berechnet und damit erstmals der „Lichtfangeffekt“ mathematisch dargestellt.

---

## Mathematischer Anhang

Dieser mathematische Anhang soll es auch dem mathematisch ungeübten Leser ermöglichen, die Rechenwege dieser Arbeit im Detail leicht nachzuvollziehen.

### Direkte Lösung der KUBELKA-MUNK-Gleichungen

Der direkte Lösungsweg der Differentialgleichungssysteme aus den Kapiteln 6.1 und 9.3 ist nachfolgend dargestellt:

Die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{s} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} - (s + a) \mathbf{E} \right] \quad (\text{A } 1)$$

und

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \left[ s^2 - (s + a)^2 \right] \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A } 2)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{E}(D) = \mathbf{E}_0 \quad (\text{A } 3)$$

und

$$\mathbf{M}(0) = \rho_s \mathbf{E}(0) \quad (\text{A } 4)$$

läßt sich mit dem Ansatz

$$\mathbf{E}(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} \quad (\text{A } 5)$$

finden.

Das charakteristische Polynom zur Gleichung A 2 lautet

$$\lambda^2 + [s^2 - (s+a)^2] = 0 \quad (\text{A } 6)$$

Die Nullstellen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ergeben sich aus der Lösung der quadratischen Gleichung A 6 wie folgt:

$$\lambda^2 + [s^2 - (s+a)^2] = 0$$

$$\lambda^2 = (s+a)^2 - s^2$$

$$\lambda^2 = [(s+a)-s][(s+a)+s]$$

$$\lambda^2 = a(2s+a)$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind damit gegeben durch:

$$\lambda_1 = +\sqrt{a(2s+a)} \quad (\text{A } 7)$$

und

$$\lambda_2 = -\sqrt{a(2s+a)} \quad (\text{A } 8)$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung wird folgende Abkürzung benutzt:

$$\lambda_1 = \lambda = +\sqrt{a(2s+a)} \quad (\text{A } 9)$$

$$\lambda_2 = -\lambda = -\sqrt{a(2s+a)} \quad (\text{A } 10)$$

Es ergibt sich hiermit die Lösungsgleichung A 11:

$$E(z) = C_1 e^{+\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} \quad (\text{A } 11)$$


---

Mit der Randbedingung A 3 gilt:

$$E(D) = E_o = C_1 e^{+\lambda D} + C_2 e^{-\lambda D} \quad (A 12)$$

Daraus wird schließlich  $C_1$  wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} E_o &= C_1 e^{+\lambda D} + C_2 e^{-\lambda D} \\ C_1 e^{+\lambda D} &= E_o - C_2 e^{-\lambda D} \\ C_1 &= \frac{1}{e^{+\lambda D}} [E_o - C_2 e^{-\lambda D}] \end{aligned} \quad (A 13)$$

Gemäß der Randbedingung A 4 gilt:

$$M(0) = \rho_s E(0) = \rho_s (C_1 + C_2) \quad (A 14)$$

$M(z)$  berechnet sich aus der Differentialgleichung A 1 mit Hilfe der Lösungsgleichung A 11 :

$$M(z) = - \frac{1}{s} \left[ C_1 \lambda e^{+\lambda z} - C_2 \lambda e^{-\lambda z} - (s+a) (C_1 e^{+\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}) \right] \quad (A 15)$$

Damit gilt für  $M(0)$  der folgende Zusammenhang:

$$M(0) = - \frac{1}{s} [C_1 \lambda - C_2 \lambda - (s+a) (C_1 + C_2)] \quad (A 16)$$

Gleichung A 14 in A 16 eingesetzt ergibt die Beziehung A 17 :

$$\rho_s (C_1 + C_2) = -\frac{1}{s} [C_1 \lambda - C_2 \lambda - (s+a)(C_1 + C_2)]$$

$$\rho_s s (C_1 + C_2) = -[C_1 \lambda - C_2 \lambda - (s+a)(C_1 + C_2)]$$

$$\rho_s s C_1 + \rho_s s C_2 = -C_1 \lambda + C_2 \lambda + (s+a)(C_1 + C_2)$$

$$\rho_s s C_2 - C_2 \lambda - (s+a) C_2 = -\rho_s s C_1 - C_1 \lambda + (s+a) C_1$$

$$C_2 [\rho_s s - \lambda - (s+a)] = C_1 [-\rho_s s - \lambda + (s+a)]$$

$$C_2 = C_1 \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} \quad (A 17)$$

Aus den beiden Gleichungen A 13 und A 17 sind die gesuchten Größen  $C_1$  und  $C_2$  zu ermitteln.

$$C_1 = \frac{1}{e^{+\lambda D}} \left[ E_o - C_1 \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} e^{-\lambda D} \right]$$

$$C_1 = \frac{1}{e^{+\lambda D}} E_o - \frac{1}{e^{+\lambda D}} C_1 \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} e^{-\lambda D}$$



$$C_1 + \frac{1}{e^{+\lambda D}} C_1 \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} e^{-\lambda D} = \frac{1}{e^{+\lambda D}} E_o$$

$$C_1 \left[ 1 + \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} \frac{e^{-\lambda D}}{e^{+\lambda D}} \right] = \frac{1}{e^{+\lambda D}} E_o$$

$$C_1 \left[ \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} \frac{e^{+\lambda D}}{e^{+\lambda D}} + \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} \frac{e^{-\lambda D}}{e^{+\lambda D}} \right] = \frac{1}{e^{+\lambda D}} E_o$$

$$C_1 \left[ \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a))e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a))e^{-\lambda D}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))} \right] = E_o$$

$$C_1 = E_o \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a))e^{-\lambda D}} \quad (A 18)$$

Mit Hilfe der Gleichung A 17 ist die Größe  $C_2$  durch Einsetzen von Gleichung A 18 unmittelbar zu berechnen:

$$C_2 = E_o \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a))e^{-\lambda D}} \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))}$$

bzw.

$$C_2 = E_o \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a))e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a))e^{-\lambda D}} \quad (A 19)$$

Die Lösung für die Bestrahlungsstärke  $E(z)$  erhält man aus der Gleichung A 11 und den vorstehend berechneten Größen  $C_1$  und  $C_2$ .

$$\begin{aligned}
 E(z) &= E_0 \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} e^{+\lambda z} \\
 &\quad + E_0 \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a))}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} e^{-\lambda z} \\
 E(z) &= E_0 \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda z} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \quad (A 20)
 \end{aligned}$$

Analog wird die Funktion für die spezifische Ausstrahlung  $M(z)$  aus der Gleichung A 15 berechnet:

$$\begin{aligned}
 M(z) &= -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) \lambda e^{+\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a)) \lambda e^{-\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \right] \\
 &\quad - (s+a) \left[ \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \right] \\
 M(z) &= -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) \lambda e^{+\lambda z} - (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) \lambda e^{-\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \right. \\
 &\quad \left. - (s+a) \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda z} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \right]
 \end{aligned}$$

Für die spezifische Ausstrahlung  $M(z)$  gilt somit:

$$M(z) = -\frac{E_0}{s} \left[ \lambda \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda z} - (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} - (s+a) \frac{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda z} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda z}}{(\rho_s s - \lambda - (s+a)) e^{+\lambda D} + (-\rho_s s - \lambda + (s+a)) e^{-\lambda D}} \right] \quad (A 21)$$

Der Reflexionsgrad  $\rho_\infty$

Der Reflexionsgrad der streuenden Schicht der Dicke  $D$  ist wie folgt definiert:

$$\rho(D) = \frac{M(D)}{E(D)} \quad (\text{Definition gemäß Gleichung 6.9, Kapitel 6.1})$$

Der Reflexionsgrad der unendlich dicken Schicht ergibt sich somit aus dem Verhältnis der Gleichungen A 20 und A 21 gemäß der oben stehenden Definition im Grenzübergang für  $D \rightarrow \infty$ :

$$\rho_\infty = \lim_{D \rightarrow \infty} \rho(D) = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{M(D)}{E(D)} = \frac{\lim_{D \rightarrow \infty} M(D)}{\lim_{D \rightarrow \infty} E(D)} \quad (A 22)$$

Im Grenzübergang zu einer unendlich dicken Streuschicht nimmt die spezifische Ausstrahlung den nachfolgenden Wert an:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} M(D) = -\frac{E_0}{s} [\lambda - (s+a)]$$

Die Bestrahlungsstärke an der Oberfläche der Schicht  $E(D)$  ist unabhängig von der Schichtdicke. Sie hat gemäß der Randbedingung aus Gleichung A 3 den Wert  $E_0$ .

Es gilt

$$\lim_{D \rightarrow \infty} E(D) = E_0$$

und damit ergibt sich

$$\rho_{\infty} = \frac{\lim_{D \rightarrow \infty} M(D)}{\lim_{D \rightarrow \infty} E(D)} = \frac{-\frac{E_0}{s} [\lambda - (s+a)]}{E_0}$$

der Reflexionsgrad der unendlich dicken Schicht:

$$\rho_{\infty} = \frac{(s+a) - \lambda}{s} \quad (A\ 23)$$

Aus Gleichung A 23 folgt unmittelbar

$$(s+a) - \lambda = s \rho_{\infty} \quad (A\ 24)$$

und

$$\frac{1}{\rho_{\infty}} = \frac{s}{(s+a) - \lambda}$$

$$\frac{1}{\rho_{\infty}} = \frac{s}{(s+a) - \lambda} \frac{(s+a) + \lambda}{(s+a) + \lambda}$$

$$\frac{1}{\rho_{\infty}} = \frac{s [(s+a) + \lambda]}{(s+a)^2 - \lambda^2}$$

$$\frac{1}{\rho_{\infty}} = \frac{s [(s+a) + \lambda]}{s^2 + 2sa + a^2 - \lambda^2}$$

Mit der Abkürzung

$$\lambda = \sqrt{a(2s+a)}$$

aus den Gleichungen A 9 und A 10 gilt

$$\lambda^2 = a(2s+a)$$

und somit folgen die untenstehenden Beziehungen A 25 und A 26

$$\frac{1}{\rho_\infty} = \frac{s [(s+a)+\lambda]}{s^2 + 2sa + a^2 - a(2s+a)}$$

$$\frac{1}{\rho_\infty} = \frac{s [(s+a)+\lambda]}{s^2}$$

$$\frac{1}{\rho_\infty} = \frac{(s+a)+\lambda}{s} \quad (\text{A 25})$$

bzw.

$$(s+a)+\lambda = s \frac{1}{\rho_\infty} \quad (\text{A 26})$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty \right] \quad (\text{gemäß Abkürzung 6.8, Kapitel 6.1})$$

folgt mit Gleichung A 25 und A 23

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{(s+a)+\lambda}{s} - \frac{(s+a)-\lambda}{s} \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\lambda}{s} \right]$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{s}$$

Somit gilt der Zusammenhang A 27 für die beiden Abkürzungen  $\alpha$  und  $\lambda$ :

$$\lambda = \alpha s \quad (\text{A 27})$$

### Explizite Lösungen der KUBELKA-MUNK-Funktion

Die expliziten Lösungen der KUBELKA-MUNK-Funktion ergeben sich aus den Gleichungen A 20 bzw. A 21 durch Einsetzen der Beziehungen A 24, A 26 und A 27 wie nachfolgend gezeigt:

$$E(z) = E_0 \frac{[\rho_s s - \lambda - (s+a)] e^{+\lambda z} + [-\rho_s s - \lambda + (s+a)] e^{-\lambda z}}{[\rho_s s - \lambda - (s+a)] e^{+\lambda D} + [-\rho_s s - \lambda + (s+a)] e^{-\lambda D}}$$

$$E(z) = E_0 \frac{\left[ \rho_s s - \frac{1}{\rho_\infty} s \right] e^{+\alpha s z} + [-\rho_s s + \rho_\infty s] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s s - \frac{1}{\rho_\infty} s \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s s + \rho_\infty s] e^{-\alpha s D}}$$

$$E(z) = E_0 \frac{-s \left[ -\rho_s + \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} - s [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{-s \left[ -\rho_s + \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} - s [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}}$$

$$E(z) = E_0 \frac{\left[ -\rho_s + \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ -\rho_s + \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}}$$


---

Für die Bestrahlungsstärke  $E(z)$  gilt damit:

$$E(z) = E_0 \frac{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \quad (A 28)$$

Für die spezifische Ausstrahlung  $M(z)$  gilt der analoge Rechenweg. Hierbei werden ebenfalls die Beziehungen aus den Gleichungen A 24, A 26 und A 27 eingesetzt.

$$M(z) = -\frac{E_0}{s} \left[ \lambda \frac{[\rho_s s - \lambda - (s+a)] e^{+\lambda z} - [-\rho_s s - \lambda + (s+a)] e^{-\lambda z}}{[\rho_s s - \lambda - (s+a)] e^{+\lambda D} + [-\rho_s s - \lambda + (s+a)] e^{-\lambda D}} \right. \\ \left. - (s+a) \frac{[\rho_s s - \lambda - (s+a)] e^{+\lambda z} + [-\rho_s s - \lambda + (s+a)] e^{-\lambda z}}{[\rho_s s - \lambda - (s+a)] e^{+\lambda D} + [-\rho_s s - \lambda + (s+a)] e^{-\lambda D}} \right]$$

$$M(z) = -\frac{E_0}{s} \left[ \lambda \frac{\left[ \rho_s s - \frac{1}{\rho_\infty} s \right] e^{+\alpha s z} - [-\rho_s s + \rho_\infty s] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s s - \frac{1}{\rho_\infty} s \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s s + \rho_\infty s] e^{-\alpha s D}} \right. \\ \left. - (s+a) \frac{\left[ \rho_s s - \frac{1}{\rho_\infty} s \right] e^{+\alpha s z} + [-\rho_s s + \rho_\infty s] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s s - \frac{1}{\rho_\infty} s \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s s + \rho_\infty s] e^{-\alpha s D}} \right]$$

Es ergeben sich die nachfolgend dargestellten Umformungen auf dem weiteren Rechenweg:

$$\begin{aligned}
 M(z) &= -\frac{E_0}{s} \left[ \lambda \frac{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} - [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \right. \\
 &\quad \left. - (s+a) \frac{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} + [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \right] \\
 M(z) &= -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{\lambda \left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} - \lambda [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(s+a) \left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} + (s+a) [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \right] \\
 M(z) &= -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{\lambda \left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} - (s+a) \left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z}}{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-\lambda (-\rho_s + \rho_\infty) e^{-\alpha s z} - (s+a) [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s D} + [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \right]
 \end{aligned}$$


---



$$M(z) = -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{\begin{bmatrix} \lambda - (s+a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \end{bmatrix} e^{+\alpha s z}}{\begin{bmatrix} \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \end{bmatrix} e^{+\alpha s D} + \begin{bmatrix} -\rho_s + \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s D}} \right. \\ \left. + \frac{\begin{bmatrix} -\lambda - (s+a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_s + \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s z}}{\begin{bmatrix} \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \end{bmatrix} e^{+\alpha s D} + \begin{bmatrix} -\rho_s + \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s D}} \right]$$

Mit den Gleichungen A 24 und A 26 folgt:

$$M(z) = -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{\begin{bmatrix} -s \ \rho_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \end{bmatrix} e^{+\alpha s z}}{\begin{bmatrix} \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \end{bmatrix} e^{+\alpha s D} + \begin{bmatrix} -\rho_s + \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s D}} \right. \\ \left. + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_\infty} \ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_s + \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s z}}{\begin{bmatrix} \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \end{bmatrix} e^{+\alpha s D} + \begin{bmatrix} -\rho_s + \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s D}} \right]$$

$$M(z) = -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{\begin{bmatrix} -s \ \rho_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \end{bmatrix} e^{+\alpha s z}}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \end{bmatrix} e^{+\alpha s D} - \begin{bmatrix} \rho_s - \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s D}} \right. \\ \left. + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_\infty} \ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_s + \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s z}}{-\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \end{bmatrix} e^{+\alpha s D} - \begin{bmatrix} \rho_s - \rho_\infty \end{bmatrix} e^{-\alpha s D}} \right]$$

$$M(z) = -\frac{E_0}{s} \left[ \frac{s \rho_\infty \left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z}}{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} + \frac{\frac{1}{\rho_\infty} s [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \right]$$

$$M(z) = -E_0 \frac{\rho_\infty \left[ \rho_s - \frac{1}{\rho_\infty} \right] e^{+\alpha s z} + \frac{1}{\rho_\infty} [-\rho_s + \rho_\infty] e^{-\alpha s z}}{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}}$$

$$M(z) = -E_0 \frac{\left[ \rho_s \rho_\infty - 1 \right] e^{+\alpha s z} + \left[ \frac{-\rho_s}{\rho_\infty} + 1 \right] e^{-\alpha s z}}{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}}$$

$$M(z) = -E_0 \frac{-[-\rho_s \rho_\infty + 1] e^{+\alpha s z} - \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z}}{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}}$$

Somit gilt:

$$M(z) = E_0 \frac{[1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} + \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z}}{\left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s D} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s D}} \quad (A 29)$$

Mit den in Kapitel 6.1 eingeführten Abkürzungen

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] \mathbf{e}^{+\alpha s \mathbf{z}} + [\rho_s - \rho_\infty] \mathbf{e}^{-\alpha s \mathbf{z}} \quad (\text{Gleichung 6.6, Kapitel 6.1})$$

und

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = [1 - \rho_s \rho_\infty] \mathbf{e}^{+\alpha s \mathbf{z}} + \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \mathbf{e}^{-\alpha s \mathbf{z}} \quad (\text{Gleichung 6.7, Kapitel 6.1})$$

ergeben sich unmittelbar die Lösungsgleichungen 6.4 und 6.5 des Kapitels 6.1. Diese entsprechen den hier angegebenen Lösungen der Gleichungen A 30 und A 31:

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}) = \mathbf{E}_0 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{z})}{\mathbf{f}(\mathbf{D})} \quad (\text{A 30})$$

und

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}) = \mathbf{E}_0 \frac{\mathbf{g}(\mathbf{z})}{\mathbf{f}(\mathbf{D})} \quad (\text{A 31})$$

### Gleichgewichtsbedingung

Der Reflexionsgrad ist mathematisch auch in Abhängigkeit von der Ortskoordinate  $z$  darstellbar. Innerhalb der Schicht berechnet sich  $\rho(z)$  wie folgt:

$$\rho(z) = \frac{M(z)}{E(z)} \quad (\text{Gleichung 6.10, Kapitel 6.3})$$

bzw.

$$\rho(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \quad (\text{A 32})$$

Der Reflexionsgrad  $\rho(z)$  wird genau unabhängig von  $z$ , wenn gilt:

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = 0 \quad (\text{A 33})$$

Die Bedingung A 33 wurde in Kapitel 6.3, Gleichung 6.11 als „Gleichgewichtsbedingung“ definiert.

Für die Hilfsfunktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  ergibt sich aus der Ableitung der Gleichung A 33 die Beziehung:

$$\frac{\frac{dg}{dz} f - \frac{df}{dz} g}{f^2} = 0 \quad (\text{A 34})$$

mit  $f(z) \neq 0$

Die Beziehung A 34 ist erfüllt, wenn gilt:

$$\frac{dg}{dz} f - \frac{df}{dz} g = 0 \quad (\text{A 35})$$

Nachfolgend werden die einzelnen Terme der Gleichung A 35 berechnet.

$$\frac{dg}{dz} = \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} - \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z}$$

$$\frac{df}{dz} = \alpha s z \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} - \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z}$$

Somit folgt für den ersten Term:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz} f &= \left\{ \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} - \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z} \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} + [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz} f &= \left[ \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} \right] \left[ \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} \right] \\ &\quad - \left[ \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z} \right] \left[ \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} \right] \\ &\quad + \left[ [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z} \right] \left[ \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} \right] \\ &\quad - \left[ [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z} \right] \left[ \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz} f &= \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+2\alpha s z} \\ &\quad - \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] \\ &\quad + \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] [1 - \rho_s \rho_\infty] \\ &\quad - \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-2\alpha s z} \end{aligned}$$

Für den zweiten Term der Gleichung A 35 gilt entsprechend:

$$\frac{df}{dz} g = \left\{ \alpha s z \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} - \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z} \right\} \\ \cdot \left\{ [1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} + \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z} \right\}$$

$$\frac{df}{dz} g = \left[ [1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} \right] \left[ \alpha s z \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} \right] \\ - \left[ [1 - \rho_s \rho_\infty] e^{+\alpha s z} \right] \left[ \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z} \right] \\ + \left[ \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z} \right] \left[ \alpha s z \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+\alpha s z} \right] \\ - \left[ \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-\alpha s z} \right] \left[ \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] e^{-\alpha s z} \right]$$

$$\frac{df}{dz} g = \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+2\alpha s z} \\ - \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty] e^{-2\alpha s z} \\ + \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+2\alpha s z} \\ - \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] [\rho_s - \rho_\infty] e^{-2\alpha s z}$$

Für die Differenz der beiden Terme aus Gleichung A 35 ergibt sich damit folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz} f - \frac{df}{dz} g = & \left\{ \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+2\alpha s z} \right. \\ & - \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] \\ & + \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] [1 - \rho_s \rho_\infty] \\ & \left. - \alpha s z [\rho_s - \rho_\infty] \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] e^{-2\alpha s z} \right\} \\ & - \left\{ \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] e^{+2\alpha s z} \right. \\ & - \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty] \\ & + \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] \\ & \left. - \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] [\rho_s - \rho_\infty] e^{-2\alpha s z} \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz} f - \frac{df}{dz} g = & 2 \alpha s z [1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty] \\ & - 2 \alpha s z \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] \\ = & 2 \alpha s z \left[ [1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty] - \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] \right] \end{aligned}$$

Mit der Bedingung A 35

$$\frac{dg}{dz} f - \frac{df}{dz} g = 0$$

werden die Gleichgewichtsbedingungen nachfolgend berechnet:

$$2 \alpha s z \left[ [1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty] - \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] \right] = 0$$

$$[1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty] - \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] = 0 \quad | \cdot [\rho_s - \rho_\infty]$$

$$[1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty]^2 - \left[ \frac{\rho_s}{\rho_\infty} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] [\rho_s - \rho_\infty] = 0$$

$$[1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty]^2 - \left[ \frac{\rho_s - \rho_\infty}{\rho_\infty} \right] \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] [\rho_s - \rho_\infty] = 0 \quad | \cdot \left[ \frac{\rho_\infty}{\rho_s - \rho_\infty} \right]$$

$$[1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty]^2 \left[ \frac{\rho_\infty}{\rho_s - \rho_\infty} \right] - \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] [\rho_s - \rho_\infty] = 0$$

$$[1 - \rho_s \rho_\infty] [\rho_s - \rho_\infty] \rho_\infty - \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right] [\rho_s - \rho_\infty] = 0 \quad | \cdot \left[ \frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s \right]$$



Weiterhin folgt:

$$\left[1 - \rho_s \rho_\infty\right] \left[\rho_s - \rho_\infty\right] \rho_\infty \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] - \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\rho_s - \rho_\infty\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \rho_\infty \left[\rho_s - \rho_\infty\right] \rho_\infty \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] - \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\rho_s - \rho_\infty\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\rho_s - \rho_\infty\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] \rho_\infty^2 - \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\rho_s - \rho_\infty\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] = 0$$

$$\left[\rho_s - \rho_\infty\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] \rho_\infty^2 - \left[\rho_s - \rho_\infty\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] = 0$$

Die „Gleichgewichtsbedingungen“ lassen sich schließlich auf die folgende Beziehung reduzieren

$$\left\{ \left[\rho_\infty - \rho_s\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] \right\} \left\{ \rho_\infty^2 - 1 \right\} = 0$$

bzw.

$$\left[\rho_\infty - \rho_s\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_s\right] \left[\frac{1}{\rho_\infty} - \rho_\infty\right] = 0 \quad (\text{A } 36)$$

Gleichung A 36 entspricht der Gleichung 6.15 aus dem Kapitel 6.3. Diese Beziehung gibt die Bedingungen für das „Gleichgewicht“ zwischen dem Reflexionsgrad der Ober- und Unterseite einer streuenden Schicht an, wie es in Kapitel 6.3 ausgeführt ist.

### StreuFunktionen $\hat{S}_+$ und $\hat{S}_-$

In Kapitel 9.2 werden die StreuFunktionen  $\hat{S}_+$  und  $\hat{S}_-$  als Hilfsgrößen bei der Berechnung der zweidimensionalen Streugleichungen verwendet. An dieser Stelle soll der Rechenweg detailliert aufgezeigt werden, der von den beiden Gleichungen 9.10 und 9.11 zur Summengleichung 9.12 führt.

Es gilt gemäß Gleichung 9.10 und 9.11, Kapitel 9.2

$$i\xi \hat{S}_+ + (3\sigma + \alpha) \hat{S}_+ = + \sigma (\hat{E} + \hat{M} + \hat{S}_-)$$

$$i\xi \hat{S}_- - (3\sigma + \alpha) \hat{S}_- = - \sigma (\hat{E} + \hat{M} + \hat{S}_+)$$

$$\hat{S}_+ [i\xi + (3\sigma + \alpha)] - \hat{S}_- \sigma = (\hat{E} + \hat{M}) \sigma$$

$$\hat{S}_- [i\xi - (3\sigma + \alpha)] + \hat{S}_+ \sigma = - (\hat{E} + \hat{M}) \sigma$$

Das Gleichungssystem wird nachfolgend umgeformt, so daß bei Subtraktion bzw. Addition der beiden Gleichungen jeweils eine der beiden gesuchten Größen entfällt.

$$\hat{S}_+ [i\xi + (3\sigma + \alpha)] - \hat{S}_- \sigma = (\hat{E} + \hat{M}) \sigma \quad | \cdot \sigma$$

$$\hat{S}_+ \sigma + \hat{S}_- [i\xi - (3\sigma + \alpha)] = - (\hat{E} + \hat{M}) \sigma \quad | \cdot [i\xi + (3\sigma + \alpha)]$$

$$\hat{S}_+ [i\xi + (3\sigma + \alpha)] \sigma - \hat{S}_- \sigma^2 = (\hat{E} + \hat{M}) \sigma^2$$

$$\hat{S}_+ [i\xi + (3\sigma + \alpha)] \sigma - \hat{S}_- [\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2] = - (\hat{E} + \hat{M}) [i\xi + (3\sigma + \alpha)] \sigma$$

$$- \hat{S}_- \sigma^2 + \hat{S}_- [\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2] = (\hat{E} + \hat{M}) \sigma^2 + (\hat{E} + \hat{M}) [i\xi + (3\sigma + \alpha)] \sigma$$

$$\hat{S}_- [\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2] = (\hat{E} + \hat{M}) [i\xi + (3\sigma + \alpha) + \sigma] \sigma$$

Somit gilt für  $\hat{S}_-$  :

$$\hat{S}_- = \frac{[i\xi + 4\sigma + \alpha] \sigma}{[\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2]} (\hat{E} + \hat{M}) \quad (\text{A 37})$$

Analog wird  $\hat{S}_+$  berechnet:

$$\hat{S}_+ [i\xi + (3\sigma + \alpha)] - \hat{S}_- \sigma = (\hat{E} + \hat{M}) \sigma \quad | \cdot [i\xi - (3\sigma + \alpha)]$$

$$\hat{S}_+ \sigma + \hat{S}_- [i\xi - (3\sigma + \alpha)] = - (\hat{E} + \hat{M}) \sigma \quad | \cdot \sigma$$

$$- \hat{S}_+ [\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2] - \hat{S}_- [i\xi - (3\sigma + \alpha)] \sigma = (\hat{E} + \hat{M}) [i\xi - (3\sigma + \alpha)] \sigma$$

$$\hat{S}_+ \sigma^2 + \hat{S}_- [i\xi - (3\sigma + \alpha)] \sigma = - (\hat{E} + \hat{M}) \sigma^2$$

$$- \hat{S}_+ [\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2] + \hat{S}_+ \sigma^2 = (\hat{E} + \hat{M}) [i\xi - (3\sigma + \alpha)] \sigma - (\hat{E} + \hat{M}) \sigma^2$$

$$- \hat{S}_+ [\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2] = (\hat{E} + \hat{M}) [i\xi - (3\sigma + \alpha) - \sigma] \sigma$$

$$\hat{S}_+ [\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2] = - (\hat{E} + \hat{M}) [i\xi - (3\sigma + \alpha) - \sigma] \sigma$$

Für die Hilfsgröße  $\hat{S}_+$  gilt somit:

$$\hat{S}_+ = - \frac{[i\xi - (4\sigma + \alpha)]\sigma}{[\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2]} (\hat{E} + \hat{M}) \quad (A 38)$$

Die Summe der beiden Hilfsgrößen  $\hat{S}_+$  und  $\hat{S}_-$  aus den Gleichungen A 37 und A 38 wird letztlich für die weitere Berechnung in Kapitel 9.2 benötigt.

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ + \hat{S}_- &= \left\{ - \frac{[i\xi - (4\sigma + \alpha)]\sigma}{[\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2]} + \frac{[i\xi + (4\sigma + \alpha)]\sigma}{[\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2]} \right\} (\hat{E} + \hat{M}) \\ &= \frac{[i\xi + (4\sigma + \alpha)]\sigma - [i\xi - (4\sigma + \alpha)]\sigma}{[\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2]} (\hat{E} + \hat{M}) \\ &= \frac{2\sigma(4\sigma + \alpha)}{[\xi^2 + (3\sigma + \alpha)^2 - \sigma^2]} (\hat{E} + \hat{M}) \\ &= \frac{2\sigma(4\sigma + \alpha)}{[\xi^2 + 9\sigma^2 + 6\sigma\alpha + \alpha^2 - \sigma^2]} (\hat{E} + \hat{M}) \\ &= \frac{2\sigma(4\sigma + \alpha)}{[\xi^2 + 8\sigma^2 + 6\sigma\alpha + \alpha^2]} (\hat{E} + \hat{M}) \\ &= \frac{2\sigma(4\sigma + \alpha)}{[\xi^2 + (4\sigma + \alpha)(2\sigma + \alpha)]} (\hat{E} + \hat{M}) \\ \hat{S}_+ + \hat{S}_- &= \frac{2\sigma(4\sigma + \alpha)}{\xi^2 + (4\sigma + \alpha)(2\sigma + \alpha)} (\hat{E} + \hat{M}) \quad (A 39) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis spiegelt das Resultat der Gleichung 9.12 aus Kapitel 9.2 wider. *Quod erat demonstrandum.*

## Symbooliste

*Liste der häufig verwendeten Symbole:*

Formelzeichen	Physikalische Größe	Dimension
$a$	Absorptionskoeffizient (KUBELKA-MUNK-Ansatz)	$1/\mu\text{m}$
$\alpha$	Absorptionskoeffizient (zweidimensionaler Ansatz)	$1/\mu\text{m}$
$D$	Dicke der streuenden Schicht	$\mu\text{m}$
$E$	Bestrahlungsstärke	$\text{W}/\text{m}^2$
$E_0$	Bestrahlungsstärke auf der Schichtoberfläche	$\text{W}/\text{m}^2$
$\hat{E}$	Fouriertransformierte von $E$	$\text{W}/\text{m}$
$\varphi$	Flächendeckungsgrad	-
$\Phi$	Strahlungsleistung	$\text{W}$
$I$	Strahlstärke	$\text{W}$
$M$	spezifische Ausstrahlung	$\text{W}/\text{m}^2$
$\hat{M}$	Fouriertransformierte von $M$	$\text{W}/\text{m}^2$
$\rho$	Reflexionsgrad	-
$\rho_s$	Reflexionsgrad des Substrates (Unterlage)	-
$\rho_\infty$	Reflexionsgrad der unendlich dicken Schicht	-
$s$	Streukoeffizient (KUBELKA-MUNK-Ansatz)	$1/\mu\text{m}$
$\sigma$	Streukoeffizient (zweidimensionaler Ansatz)	$1/\mu\text{m}$
$S_-$	Streulichtanteil in negativer x-Richtung	$\text{W}/\text{m}^2$
$S_+$	Streulichtanteil in x-Richtung	$\text{W}/\text{m}^2$
$x$	Koordinate senkrecht zum Lichteintritt	$\mu\text{m}$
$\xi$	Koordinate im Fourierraum	$1/\mu\text{m}$
$z$	Koordinate des Lichteintritts in die Schicht	$\mu\text{m}$

---

**Literaturverzeichnis**

/AMY, 1937/

L. Amy,  
Rev. d'optique 16 (1937), 81

/BERGMANN, 1978/

L. Bergmann,  
*Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 3. Optik,*  
7. Aufl. (1978), Berlin, New York: de Gruyter

/BRACEWELL, 1986/

R. Bracewell,  
*The Fourier Transform and Its Applications,*  
McGraw-Hill (1986)

/BRONSTEIN, 1979/

I. N. Bronstein, K.A. Semedjajew,  
Taschenbuch der Mathematik, 18. Auflage,  
Thun - Frankfurt/Main: Harri Deutsch(1979)

/BRONSTEIN, 1989/

I. N. Bronstein, K.A. Semedjajew,  
Taschenbuch der Mathematik, 24. Auflage,  
Thun - Frankfurt/Main: Harri Deutsch(1989)

/BRUCE, 1926/

H. D. Bruce,  
Tech. Pap. 306, Nat. Bur. Stand. (1926)

/CASEY, 1952/

J. P. Casey,  
Pulp and Paper - Vol. II,  
Interscience Publishers, New York (1952)

/CHANNON, 1918/

H. J. Channon, F. F. Renwick, B. V. Storr,  
Proc. Roy. Soc. London 11 (1860 - 62), 545

/CLAPPER, 1953/

F. R. Clapper, J. A. C. Yule,  
*The Effect of Multiple Internal Reflections on the Densities of Halftone Prints on Paper,* J. opt. Soc. Am. 23 (1953), Nr. 7, 600 - 603

/DePAOLI, 1981/

A. DePaoli,  
*The Effect of Printing Conditions on Dot Gain,*  
TAGA Proc. (1981), 17 - 42

/DIN 54 500/

DIN 54 500  
Prüfung von Papier; Bestimmung der dichtebezogenen Lichtstreu- und  
Lichtabsorptionskoeffizienten von Faserstoffen und Papieren

## /FISCHER, 1982/

G. Fischer, J. Rodriguez-Giles, K. R. Scheuter,  
*Ein physikalisches Modell für die Beschreibung von Lichtstreuungsprozessen*  
Die Farbe 30 (1982); Nr. 1/6, 199 - 220

## /GÖLLING, 1988/

S. Gölling, K. R. Scheuter,  
*Die Sicherheit der Farbübertragung  
bei kleinsten Bildpunkten im Offsetdruck,*  
Fachgebiet Druckmaschinen und Druckverfahren,  
TH Darmstadt, Bericht 2 (1986)

## /GRAEVES, 1987/

P. Greaves, B. Sunderland,  
*Dot Gain, What is the Problem?*  
TAGA Proc. (1987), 41 - 53

## /GRINBERG, 1991/

M. Grinberg, V. V. Krongauz,  
*Dot Gain and Shape Distortion in Halftone Printing,*  
Journal of Imaging Science 35 (1991), Nr. 3, 158 - 163

## /GUREVIC, 1930/

M. Gurevic,  
*Über eine rationelle Klassifikation der lichtstreuenden Medien,*  
Phys. Z. 31 (1930), 753

## /HUNTSMAN, 1987/

J. R. Huntsman,  
*A new Model of Dot Gain and its Application to a Multilayer Color Proof,*  
TAGA Proc. (1987)

## /INGLE, 1942/

G. W. Ingle,  
A. S. T. M. Bull. 32 (1942)

## /JUDD, 1934/

D. B. Judd,  
J. Research Nat. Bur. Stand. 12 (1934), 345 und 13 (1934), 281

## /JUDD, 1969/

D. B. Judd, G. Wyszecki,  
*Color in Business, Science and Industry,*  
J. Wiley + Sons, Inc., New York (1969)

## /KUBELKA, 1931/

P. Kubelka, F. Munk,  
*Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche,*  
Zeits. f. techn. Physik 12 (1931), 593 - 601

## /KUBELKA, 1931/

P. Kubelka, F. Munk,  
*Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche,*  
Zeits. f. techn. Physik 12 (1931), 593 - 601

---

- /LUO, 1993/  
C. Luo,  
*Lichtinduzierte Vergilbung von ligninhaltigen Faserstoffen und Vermeidungsmaßnahmen,*  
Fortsch.-Ber. VDI Reihe 3 Nr. 316
- /MURRAY, 1936/  
A. Murray,  
*Monochrome Reproduktion in Photoengraving,*  
J. Franklin Inst. 221 (1936), 721 - 744
- /OITTINEN, 1981/  
P. Oittinen,  
*Limits of microscopic print quality, Advances in Printing Science and Technology,*  
16th Int. IARIGAI Conference, Miami (1981), London: Pentech Press
- /PEARSON, 1980/  
M. Pearson,  
*N-Value for General Conditions,*  
TAGA Proc. (1980), 415 - 425
- /RICHTER, 1980/  
M. Richter,  
*Einführung in die Farbmeterik,*  
2. Aufl. (1980), Berlin, New York: de Gruyter
- /RITZ, 1982/  
A. Ritz,  
*Mikrofeine Strukturen im Offsetdruck,*  
Papier und Kunststoff-Verarb. (1982), Nr. 4
- /RUCKDESCHEL, 1978/  
F. R. Ruckdeschel, O. G. Hauser,  
*Yule-Nielsen effect in printing: a physical analysis,*  
Applied Optics 17 (1978), Nr. 21
- /SCHMIDT, 1959/  
G. Schmidt,  
*Die Transparenz und die Lichtremission von Papieren. Theorie und Meßverfahren,*  
Das Papier 13 (1959), Nr. 7/8, 141
- /SHAW, 1974/  
R. Shaw, F. C. Dainty,  
*Image Science,*  
London: Academic Press (1974)
- /SMITH, 1931/  
T. Smith,  
Trans. Opt. Soc. London 33 (1931), 150
-



## /STEELE, 1935/

F. A. Steele,  
*The optical characteristics of paper, I. The mathematical relationships between  
basis weight, reflectance, contrast ratio and other optical properties,*  
Paper Trade J. 100 (1935), TS 151

## /STOKES, 1860/

G. G. Stokes,  
Proc. Roy. Soc. London 94 (1918), 222

## /TESCHNER, 1989/

H. Teschner,  
*Offsetdrucktechnik,*  
6. Aufl. (1989), Fachschriften-Verlag, Fellbach

## /URBAN, 1993/

P. Urban,  
*Bewertung der frequenzmodulierten Bildrasterungsverfahren*  
Dissertation an der TH Darmstadt (1993)

## /VAN DEN AKKER, 1949/

J. A. Van den Akker,  
*Scattering and absorption of light in paper and other diffusing media,*  
TAPPI 32 (1949), 498

## /VÖLZ, 1981/

H. G. Völz,  
Die Farbe 29 (1981)

## /YULE, 1943/

J. A. C. Yule,  
*Theory of the Halftone Process.*  
*III. Dot Size and Halftone Density,*  
J. Franklin Inst. 236 (1943), 473 - 487

## /YULE, 1951/

J.A.C. Yule, W.J. Nielsen,  
*The Penetration of Light into Paper  
and its Effect on Halftone Reproduction,*  
TAGA Proc. (1951), 65 - 76